

THEORI

FÖR

ALGEBRAISKA EQVATIONERS RÖTTER.

AKADEMISK AFHANDLING,

som

med Vidtberömda Filosofiska Fakultetens i Lund tillstånd till offentlig granskning framställes Onsdagen den 20 September 1871 kl. 3 e. m. å Lärosalen N:o 1

af

C. F. E. BJÖRLING
Lektor.

STOCKHOLM, 1871.
P. A. NORSTEDT & SÖNER
KONGL. BOKTRYCKARE.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552409_0080

Att uppvisa ett samband mellan en algebraisk eqvations koëfficienter och rötter — se der uppgiften för en sådan theori, som vår titel angifver. Men ett dylikt samband kan vara af olika beskaffenhet; det kan i följd deraf också uttryckas på olika sätt.

Matematiken eger, som hvar man vet, ett särskildt språk, ett beteckningssystem, som bereder utväg att på kort och exakt sätt uttrycka dess sanningar. Men denna stora fördel kan missbrukas: man kan qväfva sanningen med formler. Kanske erbjuder vetenskapens historia mer än ett exempel derpå; kanske har man rätt i att, åtminstone till stor del, tillskrifva just detta förhållande den obenägenhet, den stora allmänheten visar för att tillegna sig denna vetenskaps upptäckter.

Af detta medel, detta teckenspråk, har man gjort särdeles vidsträckt användning för att uttrycka en generel eqvations rötter förmedelst eller, såsom det kallas, i funktioner af dess koëfficienter. Som bekant är, har försöket hittills lyckats så långt som till och med femte gradens eqvationer. Och det kan ej falla någon in att vilja förneka värdet af dessa upptäckter, af hvilka en med skäl räknas för ett bland de största, om ej det största, framsteg, Matematiken gjort i nyaste tider. Huru lång eller huru kort väg ännu återstår till målet, är deremot en fråga, angående hvilken meningarne torde vara delade; säkert är, att man ej är framme. Dessa upptäckter äro utomordentligt dyrbara skatter, men i viss mening — skrinlagda.

Ett sådant uttryck torde behöfva både förklaras och motiveras. Vi mena dermed för det första, att ifrågavarande formler ej lämpa sig rätt väl för praktiken, det vill naturligtvis här säga: för numerisk beräkning af en framställd eqvations reella rötter. Ingen matematiker lär väl, till exempel för solution af en fjerde-grads-eqvation, gifva TSCHIRNHAUSENS eller någon annan generel metod företräde framför den vanliga approximations-metoden; ett sådant val skulle, åtminstone vid de aldra flesta fall, röja betydlig brist på erfarenhet. Hvad femte-grads-eqvationen beträffar, så kräfver redan bortskaffandet af vissa dess termer, hvilket, som bekant, är en förberedande åtgärd för den generella metodens användning derpå, vida mera tid och arbete än sjelfva beräkningen af rötternas värden förmedelst approximations-metod.

Dock anse vi ej detta för det viktigaste, som ifrågavarande formler lemna öfrigt att önska. Mera betydande är den omständigheten, att de ej heller lämpa sig väl för hvad man kallar »diskussion» i vidsträcktaste mening, det är för afgörandet af, på hvad sätt en generel eqvations rötters variation är beroende af dess koëfficienters. Ett försök i just denna rigtning är det föreliggande arbetet. Vi hafva nemligen för oss uppställt problemet att finna, huruledes en eqvations rotpunkter röra sig i planet, då man låter någon eller några af dess koëfficienter, och framför allt dess sista term, variera. I huru

vidsträckt eller inskränkt omfattning vi för öfrigt tagit detta problem, hvars fullständiga solution väl tvifvelsutan ligger längre bort, än vetenskapen någonsin kan komma, visar sig tillräckligt af det följande. Här må blott nämnas, att ehuru vår metod utan synnerlig svårighet torde kunna utsträckas till eqvationer med komplexa koëfficienter, vi dock inskränkt oss till dem med reella, dels för att undvika allt för stor vidlyftighet, dels emedan detta sednare slag af eqvationer bilda en både vidsträckt och noga begränsad klass, som väl är förtjent af särskild undersökning.

Solutionen af ofvannämnda problem innefattar, åtminstone efter det sätt, hvarpå vi här tagit detsamma, tvenne särskilda momenter, nemligen för det första bestämmandet af de banor eller vägar, rotpunkterna följa, då man låter någon af eqvationens koëfficienter variera, för det andra bestämmandet af de trakter af vägen, der de, för vissa värden på koëfficienten, befinna sig. Väg-systemet eller — för att begagna ett modernt uttryck — »väg-nätet» kan tvifvelsutan väljas af åtskilliga slag; för vår del anse vi det fördelaktigast att dertill taga de kurvor, för hvilka vi af skäl, som i det följande skola visa sig, föreslagit benämningen »komplexa primär-kurvor», det vill säga de, hvilkas eqvation är

$$f''(x) - \frac{y^2}{3!} f'''(x) + \frac{y^4}{5!} f^{(v)}(x) - \frac{y^6}{7!} f^{(vii)}(x) + \dots = 0,$$

der $f''(x)$ betyder en algebraisk, rationel och hel funktion, eller hvilka tillika med x -axeln representera i polar-koordinater eqvationen

$$ar^n \sin np + br^{n-1} \sin (n-1)p + cr^{n-2} \sin (n-2)p + \dots + gr^2 \sin 2p + hr \sin p = 0,$$

der $a, b, c, \dots, g, h$ betyda reella konstanter.

Har man väl lyckats konstruera den komplexa primär-kurvan till en gifven eqvation, så erhålles svaret på frågans sednare del utan svårighet. Kroklinien består nemligen, om man undantager de enskilda fall, då multipel-punkt förekommer, af $n-1$ skilda grenar af två olika slag. Vi benämna de ena transversal-, de andra lateral-grenar. På hvar och en af de sednare finnes alltid *en* rotpunkt, på hvar och en af de förra antingen *två* eller *ingen*. Denna sanning utgjorde sjelfva grundsatsen i ett af oss utgifvet föregående arbete i denna väg, »Sur la Séparation des Racines d'équations algébriques» (Nova Acta Reg. Soc. Sc. Ups. Ser. III), hvarest vi af densamma gjorde användning på åtskilliga eqvationer, utan att likväl uppgifva någon allmän metod för konstruktionen af deras komplexa primär-kurvor, hvilken, såsom i det följande skall visa sig, utgör just den svårare delen af problemet.

Synektiska Funktioners Differentialer.

§ 1.

Antagom till en början, att u och z äro tvenne reella variabler, förbundna genom relationen

$$(1) \quad u = f(z).$$

Om vi här göra z komplex, sättande

$$(2) \quad z = x + yi,$$

der x och y betyda reella quantiteter, samt i den imaginära enheten, så blir äfven u komplex. Vi sätta

$$(3) \quad u = X + Yi,$$

der X och Y betyda tvenne reella funktioner af x och y .

Funktionen u , på detta sätt definierad, är monogen ¹⁾. Vi antaga här också alltjemt, att den är synektisk.

Vi föreställa oss x och y såsom de rätvinkliga koordinaterna för en punkt z i ett plan; X och Y såsom koordinaterna för en annan punkt u i samma plan. Vi benämna en punkt hvilken som helst i planet *reel* eller *komplex*, allteftersom den är belägen på x -axeln eller ej.

Då punkten z rör sig utefter en kurva, beskrifver punkten u en motsvarande. Vi benämna den förra den *primära*, den sednare den *sekundära*.

Vidare sätta vi

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{dY}{dX} = \operatorname{tg} A;$$

α och A äro följaktligen de vinklar, som de båda kurvornas tangenter bilda med x -axeln.

Sätta vi nu

$$(5) \quad f'(z) = X' + Y'i = \varrho e^{\varphi i},$$

der X' och Y' betyda tvenne reella funktioner af x och y , så erhålles af relationen

$$(6) \quad du = f'(z)dz,$$

eller

$$(7) \quad dX + idY = (X' + Y'i)(dx + idy)$$

de båda följande

$$(8) \quad dX = X'dx - Y'dy,$$

$$(9) \quad dY = Y'dx + X'dy,$$

hvilka bilda utgångspunkten för våra vidare undersökningar.

§ 2.

Genom att dividera (1, 9) med (1, 8) erhålles

$$(1) \quad \frac{dY}{dX} = \frac{Y'dx + X'dy}{X'dx - Y'dy} = \frac{\frac{Y'}{X'} + \frac{dy}{dx}}{1 - \frac{Y'}{X'} \cdot \frac{dy}{dx}},$$

eller, på grund af (1, 4) och (1, 5),

$$(2) \quad \operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} (\varphi + \alpha),$$

hvilken formel kan skrivas

$$(3) \quad A - \alpha = \varphi \pm l\pi. \quad (l \text{ helt tal eller noll}).$$

¹⁾ Se t. ex. BRIOT et BOUQUET, Théorie d. Fonctions doublement périodiques; pag. 10.

Genom att quadrera och addera (1, 8) och (1, 9) erhålles, efter en enkel reduktion,

$$(4) \quad dX^2 + dY^2 = (X'^2 + Y'^2)(dx^2 + dy^2)$$

eller, om vi sätta

$$(5) \quad dX^2 + dY^2 = dS^2, \quad dx^2 + dy^2 = ds^2,$$

då s och S betyda de båda kurvornas båglängder, räknade från någon viss punkt,

$$(6) \quad \frac{dS^2}{ds^2} = \varphi^2.$$

De båda formlerna (3) och (6) kunna sålunda uttryckas i ord:

Derivatans argument är vinkeln mellan de båda kurvornas tangenter;

Derivatans modyl är uttrycket för den hastighet, hvarmed den beroende variabeln rör sig på sin kurva, då den oberoende variabelns hastighet är konstant och antages till enhet.

Af dessa satser torde måhända lika vidsträckt användning kunna göras som af den välbekanta om derivatans af reella funktioner geometriska betydelse. För att ej afvika från vårt ämne måste vi emedlertid här inskränka oss till framställandet af några enkla korollarier, af hvilka ett och annat kommer att åberopas i det följande.

Om derivatan beskriver en, genom origo gående, rät linie, så bilda de båda kurvornas tangenter i motsvarande punkter konstant vinkel med hvarandra.

Om derivatan beskriver en cirkel med origo till medelpunkt, så rör sig den beroende variabeln med konstant hastighet.

Om derivatan befinner sig i en punkt på x - eller y -axeln, så äro de båda kurvornas tangenter parallela eller vinkelräta, respektive.

Om derivatan går genom origo, står den beroende variabeln stilla.

I detta sista fall har vanligen den ena af kurvorna en singulier punkt.

Dessa fyra satser kunna omvändas, hvilket deremot ej är fallet med den följande.

Om den beroende variabeln rör sig uteslutande en rät linie, kan den ej vända, utan att derivatan blir noll.

§ 3.

Vi öfvergå nu till uppsökandet af uttryck för differentialerna af högre ordningar af funktionerna X och Y , analoga med de i formlerna (1, 8) och (1, 9) för differentialerna af första ordningen framställda.

Härvid förutsätta vi alltjemt, att icke blott sjelfva funktionen $f(z)$, utan ock alla dess derivator äro synektiska¹⁾. Alltså kunna vi sätta

$$(1) \quad f^{(m)}(z) = \frac{d^m u}{dz^m},$$

eller om vi antaga

$$(2) \quad f^{(m)}(z) = X^{(m)} + Y^{(m)}i,$$

der naturligtvis med $X^{(m)}$ och $Y^{(m)}$ förstås tvenne reella funktioner af x och y ,

$$(3) \quad X^{(m)} + Y^{(m)}i = \frac{d^m X + i d^m Y}{(dx + i dy)^m},$$

¹⁾ Det är i sjelfva verket bevisadt, att om en funktion är synektisk, så är dess derivata det äfven. Se t. ex. BRIOT et BOUQUET, Th. d. Fonct. doubl. périod.; pag. 34.

hvaraf erhålles

$$(4) \quad d^m X + i d^m Y = (X^{(m)} + Y^{(m)} i) (dx + i dy)^m.$$

Tillägga vi nu s och α samma betydelse som i föregående paragrafer, så är

$$(5) \quad dx = ds \cos \alpha, \quad dy = ds \sin \alpha,$$

och formeln (4) kan skrivas

$$(6) \quad d^m X + i d^m Y = (X^{(m)} + Y^{(m)} i) (\cos \alpha + i \sin \alpha)^m ds^m$$

eller, på grund af MOIVRES theorem,

$$(7) \quad d^m X + i d^m Y = (X^{(m)} + Y^{(m)} i) (\cos m\alpha + i \sin m\alpha) ds^m,$$

som i sig innefattar de båda

$$(8) \quad d^m X = (X^{(m)} \cos m\alpha - Y^{(m)} \sin m\alpha) ds^m,$$

$$(9) \quad d^m Y = (X^{(m)} \sin m\alpha + Y^{(m)} \cos m\alpha) ds^m,$$

hvilka för det följande blifva af stor vikt.

Komplexa Primär-kurvor.

§ 4.

Vi förstå i det följande med u eller $f(z)$ en algebraisk, rationel och hel funktion af n :te graden, der koefficienten för z^n är positiv, och de öfriga reella, korteligen

$$(1) \quad az^n + bz^{n-1} + cz^{n-2} + \dots + gz^2 + hz + k. \quad (a > 0)$$

Denna funktion är uppenbarligen, likasom alla dess derivator, synektisk.

Sätta vi i denna expression

$$(2) \quad z = x + yi,$$

så antager den formen

$$(3) \quad X + Yi,$$

der

$$(4) \quad X = f(x) - \frac{y^2}{2!} f''(x) + \frac{y^4}{4!} f^{iv}(x) - \frac{y^6}{6!} f^{vi}(x) + \dots,$$

$$(5) \quad Y = y[f'(x) - \frac{y^2}{3!} f'''(x) + \frac{y^4}{5!} f^{v}(x) - \frac{y^6}{7!} f^{vii}(x) + \dots].$$

Införa vi deremot re^{pi} i stället för z , så blir

$$(6) \quad X = ar^n \cos np + br^{n-1} \cos (n-1)p + cr^{n-2} \cos (n-2)p + \dots + gr^2 \cos 2p + hr \cos p + k,$$

$$(7) \quad Y = ar^n \sin np + br^{n-1} \sin (n-1)p + cr^{n-2} \sin (n-2)p - \dots + gr^2 \sin 2p + hr \sin p.$$

Alla punkter i planet, hilkas koordinater satisfiera de båda eqvationerna

$$(8) \quad X = Y = 0,$$

benämna vi *rotpunkter* till eqvationen $f(z) = 0$.

Satisfiera en punkts koordinater icke blott systemet (8), utan äfven

$$(9) \quad X' = Y' = 0,$$

$$(10) \quad X'' = Y'' = 0,$$

och så vidare till och med

$$(11) \quad X^{(m-1)} = Y^{(m-1)} = 0,$$

men deremot icke

$$(12) \quad X^{(m)} = Y^{(m)} = 0,$$

benämna vi den en *m-faldig rotpunkt* till eqv. $f(z) = 0$.

Om nu variabeln z rör sig utefter den kurva, hvars eqvation är

$$(13) \quad Y = 0,$$

eller, såsom vi äfven skriva den,

$$(14) \quad Y(x, y) = 0,$$

det vill säga, i rätvinkliga koordinater

$$(15) \quad y[f'(x) - \frac{y^2}{3!}f'''(x) + \frac{y^4}{5!}f^{(5)}(x) - \frac{y^6}{7!}f^{(7)}(x) + \dots] = 0,$$

och i polar-koordinater

$$(16) \quad ar^n \sin np + br^{n-1} \sin (n-1)p + cr^{n-2} \sin (n-2)p + \dots + gr^2 \sin 2p + hr \sin p = 0,$$

så är u alltid $= X$, följaktligen reel. Således är i detta fall x -axeln den sekundära kurvan, (15) eller (16) den primära. Denna sednare innehåller uppenbarligen alla rot-punkterna.

Då, under variabelns z rörelse utefter primär-kurvan, u inträffar i origo, befinner sig den förra i en rotpunkt. En viss båglängd af primär-kurvan innehåller ett jemnt (inber. noll) eller udda antal rotpunkter, allteftersom mot dess ändpunkter svara u -värden af samma eller motsatta tecken.

Af eqvationen (15) följa omedelbart några egenskaper hos primär-kurvan, nemligen:

Den är symmetrisk i anseende till x -axeln;

Den är oberoende af konstanten k , hvilken vi i det följande benämna *eqvationens* $f(z) = 0$ *parameter*.

Den är beroende af konstanten h , hvilken vi benämna *kurvans parameter*;

Den består af två delar: 1) x -axeln, 2) den kurva, hvars eqvation är

$$(17) \quad f'(x) - \frac{y^2}{3!}f'''(x) + \frac{y^4}{5!}f^{(5)}(x) - \frac{y^6}{7!}f^{(7)}(x) + \dots = 0,$$

korteligen

$$(18) \quad K(x, y) = 0 \quad \text{eller} \quad K = 0;$$

vi benämna denna sednare den *komplexa primär-kurvan*, eller helt enkelt *K-kurvan*.

§ 5.

Eqvationen (4, 16) visar, att r blir i allmänhet oändligt stor för $\sin np = 0$, d. v. s. för

$$(1) \quad np = \pm l\pi, \quad (l \text{ helt tal eller noll})$$

eller

$$(2) \quad p = \pm \frac{l\pi}{n}.$$

Detta gifver anledning till den förmodan, att vår primär-kurva har n rätliniga asymptoter, af hvilka tvenne närliggande alltid bilda vinkeln $\frac{\pi}{n}$ med hvarandra. Att så

verkligen är förhållandet, kunna vi öfvertyga oss om genom att undersöka polar-subtangenten $r^2 \frac{dp}{dr}$, hvars uttryck blir, på grund af (4, 16),

$$(3) \quad -\frac{nar^n \sin np + (n-1)br^{n-1} \sin (n-1)p + (n-2)cr^{n-2} \sin (n-2)p + \dots + 2gr^2 \sin 2p + hr \sin p}{nar^{n-1} \cos np + (n-1)br^{n-2} \cos (n-1)p + (n-2)cr^{n-3} \cos (n-2)p + \dots + 2gr \cos 2p + h \cos p}.$$

Ur samma eqvation erhåller man ock

$$(4) \quad ar^n \sin np = -br^{n-1} \sin (n-1)p - cr^{n-2} \sin (n-2)p - \dots - gr^2 \sin 2p - hr \sin p,$$

eller

$$(5) \quad nar^n \sin np = -nbr^{n-1} \sin (n-1)p - ncr^{n-2} \sin (n-2)p - \dots - ngr^2 \sin 2p - nhr \sin p;$$

följaktligen kan (3) skrivas

$$(6) \quad \frac{br^{n-1} \sin (n-1)p + 2cr^{n-2} \sin (n-2)p + \dots + (n-2)gr^2 \sin 2p + (n-1)hr \sin p}{nar^{n-1} \cos np + (n-1)br^{n-2} \cos (n-1)p + \dots + 2gr \cos 2p + h \cos p},$$

hvilket blir, för $r = \infty$ och $p = \frac{m\pi}{n}$,

$$(7) \quad -\frac{b}{na} \sin \frac{m\pi}{n};$$

detta är således afståndet från origo till den asymptot, hvars vinkel mot x -axeln är $\frac{m\pi}{n}$.

Abscissan för samma asymptots intersektionspunkt med x -axeln är alltså $-\frac{b}{na}$.

I denna punkt skära alla asymptoterna x -axeln. De bilda följaktligen en stjärna med $2n$ strålar, hvars midtpunkt är den nämnde skärningspunkten. x -axeln är emellertid blott så till vida att räkna dit, som den sjelf är beståndsdel af kurvan.

För $b = 0$ är origo asymptot-stjernans midtpunkt.

Vi beteckna i det följande de ofvanför x -axeln belägna asymptot-strålarne, i ordning från höger till venster, med $A, B, C, D, \dots$; de motsvarande symmetriska, nedanför samma axel belägna, med $A', B', C', D', \dots$.

Af formeln (4, 6) följer då, att om z aflägsnar sig oändligt långt från origo, följande en gren af kurvan, hvars tillhörande asymptot-stråle är $A, C, E, \dots$, eller i allmänhet af udda ordningsnummer (A eller A' räknad för den första), tenderar X eller u mot $-\infty$; men deremot mot $+\infty$, om strålen är $B, D, F, \dots$, eller i allmänhet af jemn ordningsnummer.

§ 6.

Låt x, y vara koordinaterna för en punkt af primär-kurvan; $x + \Delta x, y + \Delta y$ koordinaterna för en punkt hvilkensomhelst i närheten af den förre. Emedan funktionen Y är kontinuerlig, så har man, på grund af TAYLORS theorem och emedan $Y(x, y)$ är $= 0$,

$$(1) \quad Y(x + \Delta x, y + \Delta y) = \sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{m!} \left(\Delta x \frac{d}{dx} + \Delta y \frac{d}{dy} \right)^m Y,$$

då vi här, likasom i det följande, begagna det symboliska uttrycket

$$(2) \quad \left(\Delta x \frac{d}{dx} + \Delta y \frac{d}{dy} \right)^m Y$$

såsom likabetydande med

$$(3) \quad \Delta x^m \left(\frac{d^m Y}{dx^m} \right) + \frac{m}{1} \Delta x^{m-1} \Delta y \left(\frac{d^m Y}{dx^{m-1} dy} \right) + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \Delta x^{m-2} \Delta y^2 \left(\frac{d^m Y}{dx^{m-2} dy^2} \right) + \dots + \\ + \frac{m}{1} \Delta x \Delta y^{m-1} \left(\frac{d^m Y}{dx dy^{m-1}} \right) + \Delta y^m \left(\frac{d^m Y}{dy^m} \right),$$

betecknande med

$$(4) \quad \left(\frac{dY}{dx} \right), \left(\frac{dY}{dy} \right), \left(\frac{d^2 Y}{dx^2} \right), \left(\frac{d^2 Y}{dx dy} \right), \left(\frac{d^2 Y}{dy^2} \right), \dots$$

de respektiva partiella derivatorna.

Eftersom Δx och Δy kunna tagas huru små som helst, så kan tecknet för $Y(x + \Delta x, y + \Delta y)$ göras beroende af

$$(5) \quad \Delta x \left(\frac{dY}{dx} \right) + \Delta y \left(\frac{dY}{dy} \right).$$

Antaga vi nu, att punkten $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ är belägen på kurvans normal, så är

$$(6) \quad \Delta x \left(\frac{dY}{dy} \right) = \Delta y \left(\frac{dY}{dx} \right),$$

och expressionen (5) kan skrivas

$$(7) \quad \Delta x \left(\frac{dY}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dY}{dy} \right)^2.$$

Vi särskilja nu trenne fall:

1:o. Hvarken $\left(\frac{dY}{dx} \right)$ eller $\left(\frac{dY}{dy} \right) = 0$.

Expressionen (7) vexlar tecken på samma gång som Δx . Följaktligen gör $Y(x + \Delta x, y + \Delta y)$ det äfven, det vill säga att på ena sidan om kurvan ligga sådana punkter, för hvilka funktionen $Y(x, y)$ är positiv, med ett ord *positiva punkter*, på den andra sidan negativa. De förra bilda tillsammans ett *positivt fält*, de sednare ett *negativt*. *Kurvan åtskiljer alltså tvenne fält af motsatta tecken.*

2:o. Antingen $\left(\frac{dY}{dx} \right)$ eller $\left(\frac{dY}{dy} \right) = 0$.

Kurvans normal är då parallel med endera af koordinat-axlarne. Genom en vridning af axel-systemet, som hvarken förändrar funktionens $Y(x, y)$ gradtal eller dess egenskap af kontinuitet, kan man reducera detta fall till det föregående, samt bevisa på samma sätt som der, att *kurvan åtskiljer tvenne fält af motsatta tecken.*

3:o. $\left(\frac{dY}{dx} \right) = \left(\frac{dY}{dy} \right) = 0$.

Punkten (x, y) är då singulier. Vi skola närmare granska denna händelse i följande paragraf.

§ 7.

Vi gå nu att undersöka beskaffenheten af primär-kurvans singuliera punkter, utslutande dock från vår undersökning inflexions-punkterna.

Vilkoret för, att en punkt S af kurvan skall vara singulier, är, som bekant, att dess koordinater x, y satisfiera systemet

$$(1) \quad \left(\frac{dY}{dx} \right) = \left(\frac{dY}{dy} \right) = 0.$$

Vi antaga, att x och y äfven satisfiera systemerna

$$(2) \quad \left(\frac{d^2 Y}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2 Y}{dx dy}\right) = \left(\frac{d^2 Y}{dy^2}\right) = 0,$$

$$(3) \quad \left(\frac{d^3 Y}{dx^3}\right) = \left(\frac{d^3 Y}{dx^2 dy}\right) = \left(\frac{d^3 Y}{dx dy^2}\right) = \left(\frac{d^3 Y}{dy^3}\right) = 0,$$

och så vidare till och med

$$(4) \quad \left(\frac{d^{m-1} Y}{dx^{m-1}}\right) = \left(\frac{d^{m-1} Y}{dx^{m-2} dy}\right) = \dots\dots = \left(\frac{d^{m-1} Y}{dx dy^{m-2}}\right) = \left(\frac{d^{m-1} Y}{dy^{m-1}}\right) = 0,$$

men deremot icke systemet

$$(5) \quad \left(\frac{d^m Y}{dx^m}\right) = \left(\frac{d^m Y}{dx^{m-1} dy}\right) = \dots\dots = \left(\frac{d^m Y}{dx dy^{m-1}}\right) = \left(\frac{d^m Y}{dy^m}\right) = 0.$$

Låt $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ vara koordinaterna för en punkt af kurvan i närheten af S . Den Taylorska serie-utvecklingen af expressionen $Y(x + \Delta x, y + \Delta y)$ gifver då

$$(6) \quad \left(\Delta x \frac{d}{dx} + \Delta y \frac{d}{dy}\right)^m Y + \frac{1}{m+1} \left(\Delta x \frac{d}{dx} + \Delta y \frac{d}{dy}\right)^{m+1} Y + \dots\dots = 0.$$

Sätta vi nu

$$(7) \quad \Delta x = R \cos v, \quad \Delta y = R \sin v,$$

så kan (6), efter förkortning med R^m , skrivas

$$(8) \quad \left(\cos v \frac{d}{dx} + \sin v \frac{d}{dy}\right)^m Y + RM = 0,$$

der med M förstås en qvantitet, som åtminstone icke blir oändlig, då R tenderar mot noll.

Hvarje värde på v mellan 0 och 2π , som, för ett visst uppgifvet värde på R , satisfierar eqvationen (8), angifver en intersektionspunkt mellan primär-kurvan och den cirkel, som uppritas med S till centrum och R till radie.

Då R tenderar mot noll, är naturligtvis

$$(9) \quad \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx},$$

eller, som är detsamma,

$$(10) \quad \lim \operatorname{tg} v = \operatorname{tg} \alpha,$$

och eqvationen (8) blir vid limes-öfvergången

$$(11) \quad \left(\cos \alpha \frac{d}{dx} + \sin \alpha \frac{d}{dy}\right)^m Y = 0,$$

hvilken också kan skrivas

$$(12) \quad \frac{\left(dx \frac{d}{dx} + dy \frac{d}{dy}\right)^m Y}{ds^m} = 0,$$

kortligen

$$(13) \quad \frac{d^m Y}{ds^m} = 0,$$

eller, på grund af (3, 9),

$$(14) \quad X^{(m)} \sin m\alpha + Y^{(m)} \cos m\alpha = 0,$$

som gifver

$$(15) \quad \operatorname{tg} m\alpha = -\frac{Y^{(m)}}{X^{(m)}},$$

eller, om man sätter

$$(16) \quad -\frac{Y^{(m)}}{X^{(m)}} = \operatorname{tg} m\beta,$$

helt enkelt

$$(17) \quad \operatorname{tg} m\alpha = \operatorname{tg} m\beta,$$

samt följaktligen

$$(18) \quad m\alpha = m\beta \pm l\pi, \quad (l \text{ helt tal eller noll})$$

eller slutligen

$$(19) \quad \alpha = \beta \pm \frac{l\pi}{m}.$$

Således har primär-kurvan i punkten S m tangenter, af hvilka två närliggande alltid bilda vinkeln $\frac{\pi}{m}$ med hvarandra.

Emedan expressionen i (8) tenderar mot

$$(20) \quad X^{(m)} \sin m\alpha + Y^{(m)} \cos m\alpha,$$

vid indefinit aftagande R , kan denna quantitet tagas nog liten, för att tecknet för den förstnämnda expressionen må, i hvarje uppgifvet fall, kunna göras beroende af (20), samt att således v -rötterna mellan 0 och 2π till equationen (8) må blifva lika många som och skilja sig huru litet som helst från de motsvarande α -rötterna till eqv. (14). Således är den singuliera punkten S en m -faldig multipel-punkt.

Den är äfven en $(m-1)$ -faldig rot-punkt till equationen $f'(z) = 0$. Ty på grund af formlerna (1)–(5) måste dess koordinater göra de $m-1$ första differentialerna af Y lika med noll för hvarje värde på α , således äfven på grund af (3, 9) satisfiera equations-systemerna

$$(21) \quad X' = Y' = 0,$$

$$(22) \quad X'' = Y'' = 0,$$

och så vidare till och med

$$(23) \quad X^{(m-1)} = Y^{(m-1)} = 0,$$

men deremot icke systemet

$$(24) \quad X^{(m)} = Y^{(m)} = 0.$$

Denna sista sats kan uppenbarligen omvändas. Ligger en $(m-1)$ -faldig rot-punkt till equationen $f'(z) = 0$ på primär-kurvan, så är den en m -faldig multipel-punkt.

§ 8.

Innan vi gå vidare, måste vi framställa tvenne lånesatser.

Lemma I. I en equation.

$$(1) \quad ax^{2m-1} + bx^{2m-2} + \dots + gx + H = 0$$

af udda grad, hvars alla koëfficienter äro reella, och den första positiv, kan man alltid tilldela konstanten H en negativ valör, tillräckligt numeriskt stor, för att equationen må hafva en enda reel rot, hvilken är positiv; samt en positiv valör, tillräckligt stor, för att equationen må hafva en enda reel rot, hvilken är negativ. Dessa rötters numeriska valörer växa i oändlighet på samma gång som konstantens.

Lemma II. I en equation.

$$(2) \quad ax^{2m} + bx^{2m-1} + \dots + gx + H = 0$$

af jemn grad, hvars alla koëfficienter äro reella, och den första positiv, kan man alltid tilldela konstanten H en negativ valör, tillräckligt numeriskt stor, för att equationen må

hafva blott tvenne reella rötter, af hvilka den ena är positiv, den andra negativ; samt en positiv valör, tillräckligt stor, för att eqvationen ej må hafva någon reel rot. De båda förstnämnda rötternas numeriska valörer växa i oändlighet på samma gång som konstantens.

För att inse sanningen af dessa båda satser behöfver man blott erinra sig beskaffenheten af de kurvor, som representera i rätvinkliga koordinater eqvationerna

$$(3) \quad y = ax^{2m-1} + bx^{2m-1} + \dots + gx + H$$

och

$$(4) \quad y = ax^{2m} + bx^{2m-1} + \dots + gx + H;$$

samt att man, genom att öka eller minska konstanten H , ej förändrar dessa kurvors form, utan endast flyttar x -axeln nedåt eller uppåt parallelt med sig sjelf.

§ 9.

För undvikande af onödig vidlyftighet antaga vi alltjemt i det följande, att den framställda eqvationen

$$(1) \quad f(z) = 0$$

blifvit befriad från sin andra term, så att dess form är

$$(2) \quad az^n + bz^{n-2} + cz^{n-3} + \dots + gz^2 + hz + k = 0. \quad (a > 0).$$

Då är origo asymptot-stjernans midtpunkt (§ 5).

Radii vectores till den komplexa primär-kurvans intersektionspunkter med en rät linie, som går genom origo och bildar vinkeln p med x -axeln, äro de reella rötterna till eqvationen

$$(3) \quad ar^{n-1} \sin np + br^{n-3} \sin (n-2)p + cr^{n-4} \sin (n-3)p + \dots + gr \sin 2p + h \sin p = 0.$$

Vi antaga till en början, att n är jemnt.

Inom intervallet XA , det vill säga för $\frac{\pi}{n} > p > 0$, är $\sin np$ positiv. Alltså kan man, på grund af Lemma I, tilldela konstanten h en negativ valör, tillräckligt numeriskt stor, för att eqvationen (3) må hafva en enda reel rot, hvilken är positiv; det vill säga, att hvilken uppgifven stråle som helst mellan X och A skär kurvan, men blott i en punkt.

Inom intervallet AB , det vill säga för $\frac{2\pi}{n} > p > \frac{\pi}{n}$, är $\sin np$ negativ. Vi ändra tecken för eqvationens (3) alla termer; koëfficienten för r^{n-1} blir då positiv, och den konstanta termen af motsatt tecken mot h . Man kan då, på grund af Lemma I, tilldela konstanten h en negativ valör, tillräckligt numeriskt stor, för att eqvationen (3) må hafva en enda reel rot, hvilken är negativ; det vill säga, att strålarne mellan A och B icke skära kurvan, men väl deras förlängningar i vertikal-intervallet, hvar och en dock blott i en punkt.

Genom upprepande af dessa slutledningar för hvarje intervall finner man, att åt kurvans parameter kan tilldelas en negativ valör, tillräckligt numeriskt stor, för att kurvan må erhålla det utseende, som fig. 1 utvisar för $n = 4$, fig. 32 för $n = 6$, och fig. 42 för $n = 8$; det vill säga, att den består af en gren, som skär den positiva x -axeln och har strålarne A och A' till asymptoter, samt af $n - 2$ andra, symmetriskt belägna grenar, af hvilka hvar och en har till asymptoter en stråle af jemn ordningsnummer ($B, D, F, \dots$) samt dess nästföljande.

På samma sätt bevisas

med stöd af Lemma I, att, om n är jemnt, kan åt kurvans parameter tilldelas en positiv valör, tillräckligt stor, för att kurvan må erhålla det utseende, som fig. 7 utvisar för $n = 4$, fig. 41 för $n = 6$, och fig. 60 för $n = 8$; det vill säga, att den består af en gren, som skär den negativa x -axeln och har dess båda angränsande strålar till asymptoter, samt af $n - 2$ andra, symmetriskt belägna grenar, af hvilka hvar och en har till asymptoter en stråle af udda ordningsnummer ($A, C, E, \dots$) samt dess nästföljande;

samt med stöd af Lemma II, att, om n är udda, kan åt kurvans parameter tilldelas en negativ valör, tillräckligt numeriskt stor, för att kurvan må erhålla det utseende, som fig. 11 utvisar för $n = 5$, det vill säga, att den består af tvenne grenar, som skära hvarsin hälft af x -axeln och hafva dess angränsande strålar till asymptoter, samt af $n - 3$ andra, symmetriskt belägna grenar, af hvilka hvar och en har till asymptoter en stråle af jemn ordningsnummer ($B, D, F, \dots$) samt dess nästföljande;

och en positiv valör, tillräckligt stor, för att kurvan må erhålla det utseende, som fig. 20 utvisar för $n = 5$, det vill säga, att den består af $n - 1$ grenar, af hvilka ingen skär x -axeln, men hvar och en har till asymptoter en stråle af udda ordningsnummer ($A, C, E, \dots$) samt dess nästföljande.

§ 10.

Vi benämna i det följande

den form af kurva, som fig. 1 utvisar för $n = 4$, fig. 11 för $n = 5$, fig. 32 för $n = 6$, och fig. 42 för $n = 8$, det vill säga den, som den komplexa primär-kurvan antager, då dess parameter växer indefinit åt det negativa hållet, den *nedre gränsformen*; samt den form, som fig. 7 utvisar för $n = 4$, fig. 20 för $n = 5$, fig. 41 för $n = 6$, och fig. 60 för $n = 8$, det vill säga den, som den komplexa primär-kurvan antager, då dess parameter växer indefinit åt det positiva hållet, den *öfre gränsformen*.

Vi benämna ock en gren af kurvan, som ej skär x -axeln och som har till asymptoter tvenne strålar, den ena af jemn, den andra af udda ordningsnummer, en *lateral-gren*. På grund af symmetrien förekomma de alltid parvis. En hvar betecknas med samma bokstäfver som dess tillhörande strålar. Exempel: BC och $B'C'$ i fig. 1, 2; $BC, B'C', DE$ och $D'E'$ i fig. 32—34; $BC, B'C', DE, D'E', FG$ och $F'G'$ i fig. 42 och 43.

Deremot benämna vi en gren af kurvan, som skär x -axeln i en punkt och har till asymptoter tvenne symmetriskt belägna strålar, en *transversal-gren*. Hvarje sådan betecknas med samma bokstäfver som dess tillhörande strålar. Exempel: AA' och DD' i fig. 11—16; AA', FF' och GG' i fig. 45—54.

Då n är jemnt, består således den komplexa primär-kurvans såväl nedre som öfre gränsform af en transversal- och $n - 2$ lateral-grenar.

Då n är udda, består deremot den komplexa primär-kurvans nedre gränsform af 2 transversal- och $n - 3$ lateral-grenar; samt öfre gränsform af $n - 1$ lateral-grenar.

Då parametern h växer kontinuerligt från $-\infty$ till $+\infty$, förändrar sig kurvan kontinuerligt från den nedre till den öfre gränsformen.

§ 11.

Då kurvans parameter h är oändligt stor och negativ, äro de fält, som omgifvas af lateral-grenar, positiva ¹⁾; det, som innehåller origo, är negativt. Då deremot parametern är oändligt stor och positiv, äro lateral-fälten negativa, central-fältet positivt.

Under det parametern h växer oupphörligt, minskas de negativa fälten, ökas de positiva. Men det kan aldrig hända, att ett nytt positivt fält bildar sig inuti ett negativt. Ty i sådan händelse skulle det begynna antingen med en punkt eller med en linie. Det förra fallet skulle gifva en isolerad punkt; det andra en gren, omgifven å ömse sidor af negativa fält. Båda äro omöjliga.

Under det att de positiva fälten tillväxa, kan det hända, att tvenne af dem råkas. Antag, att sådant sker för $h = h_1$ i punkten a (fig. I), hvilken följaktligen blir en dubbel-punkt. Då h derefter vuxit med en oändligt liten qvantitet, finnes denna multipel-punkt ej mer; de båda positiva fälten hafva sammansmält till ett; de negativa, som råkades i punkten a , hafva nu blifvit trängda isär (fig. II).

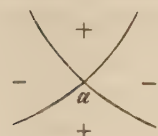


Fig. I.



Fig. II.

Men det kan aldrig hända, att tvenne positiva fält råkas på en gång i flere än en punkt, vare sig att desse punkter äro oändligt många och sammanhängande i en linie, eller att de äro skilda. Ty det förra fallet skulle gifva en gren, omgifven å ömse sidor af positiva fält; det andra föranleda uppkomsten af en eller flere slutna kurvor, omgifvande negativa fält, hvilka under parameterns fortgående tillväxt skulle sammankrympa till isolerade punkter. Båda äro omöjliga.

Icke heller kan det inträffa, att tvenne positiva fält, hvilka redan förenat sig på ett ställe, råkas äfven på ett annat. Ty derigenom skulle en slutna kurva, omgifvande ett negativt fält, uppkomma, hvilket, enligt hvad nyss blifvit visadt, är omöjligt.

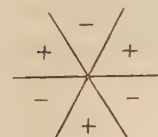


Fig. III.

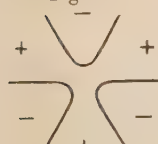


Fig. IV.

Deremot kan det hända, att flere än två positiva fält på en gång sammanträffa i samma punkt. Fig. III och IV utvisa förloppet i den händelse, att de sammanträffande fältens antal är tre. I sådant fall uppkommer tydligen en tre-dubbel punkt, och i allmänhet en multipel-punkt, hvars ordningsnummer är lika med antalet af de positiva fält, som sammanträffa. Ligger emedlertid en på detta sätt uppkommen m -faldig punkt af K -kurvan på x -axeln, så blir den uppenbarligen en $(m+1)$ -faldig punkt af primär-kurvan.

§ 12.

Då tvenne positiva fält råkas och sammansmälta, måste detta ske på något af följande fyra sätt.

1. Tvenne på samma sida om x -axeln belägna lateral-grenar, omgifvande positiva fält, sammanträffa. Resultatet af föreningen blir uppenbarligen två nya lateral-grenar. Ex. fig. 24—26; fig. 61—63.

¹⁾ Vi begagna här och i det följande benämningen positiva och negativa fält med ständigt afseende på funktionen K .

2. Tvenne på hvarsin sida om x -axeln belägna lateral-grenar råkas. I följd af symmetrien måste den på detta sätt uppkomna multipel-punkten ligga på x -axeln. Resultatet af föreningen blir tvenne transversal-grenar. Ex. fig. 2—4; fig. 13—15; fig. 43—45.

3. En lateral- och en transversal-gren råkas. Resultatet af föreningen blir tvenne dylika grenar, ehuru på annat sätt belägna. Ex. fig. 8—10; fig. 34—36; fig. 37—39.

4. Tvenne transversal-grenar råkas. Detta måste ske i en punkt på x -axeln, ty eljest skulle en sluten kurva, omgifvande negativt fält, uppkomma, hvilket är omöjligt. Resultatet blir ett par lateral-grenar. Ex. fig. 16—18; 22—24; fig. 52—54.

Vid och genom tvenne positiva fälts förening uppkommer således icke något annat slag af grenar än de båda förut beskrifna; icke heller förändras grenarnes antal. På samma sätt bevisas utan svårighet, att vid flere än tvenne fälts förening kan detta ej heller inträffa. Lika litet kan det ske, under det de positiva fälten tillväxa utan att råkas. Följaktligen består den komplexa primär-kurvan endast af transversal- och lateral-grenar, tillsammans $n - 1$, utom i de undantagsfall, då multipel-punkt förekommer.

§ 13.

En reel och enkel rotpunkt till eqvationen $f'(z) = 0$ är en dubbel-punkt af primär-kurvan. Den ena af de derigenom gående grenarne är naturligtvis x -axeln; den andra en transversal-gren, såframt den ej går till en multipel-punkt. Transversal-grenens tangent är alltså vinkelrät mot x -axeln i skärningspunkten.

Äro $2m$ rötter till eqvationen $f'(z) = 0$ komplexa, de öfriga $n - 2m - 1$ reella och olika, består alltså den komplexa primär-kurvan af $2m$ lateral- och $n - 2m - 1$ transversal-grenar, såframt ej multipel-punkt förekommer.

En reel och $(m - 1)$ -faldig rotpunkt till eqvationen $f'(z) = 0$ är en m -faldig punkt af primär-kurvan, ehuru naturligtvis blott en $(m - 1)$ -faldig punkt af dess komplexa del.

§ 14.

I sin nedre gränsform innesluter den komplexa primär-kurvan $n - 1$ positiva fält, i sin öfre ett enda.

Om, under parameterens kontinuerliga tillväxt från $-\infty$ till $+\infty$, de positiva fälten sammansmälta två och två i sönder, så inträffa, eftersom vid hvarje sådan förening fältens antal minskas med ett, i det hela $n - 2$ sådana föreningar. Således har kurvan i detta fall, under sin ombildning från nedre till öfre gränsformen, $n - 2$ (dubbla) multipel-punkter.

Mot hvarje multipel-punkt svarar ett visst värde på kurvans parameter. Deremot kan kurvan, för ett dylikt värde på parametern, ega två multipel-punkter — såsom alltid händelsen är, då dessa punkter äro komplexa — och äfven flere. Alltså gifves det högst $n - 2$ värden på h , för hvilka kurvan kan ega multipel-punkt.

Om tre positiva fält på en gång sammansmälta, så uppkommer en tredubbel punkt, och fältens antal minskas med två. Således motsvarar en tredubbel punkt två dubbla.

I allmänhet motsvarar en m -faldig punkt $m - 1$ dubbla, så att, om kurvan har en dylik punkt, minskas antalet af dess multipel-punkter med $m - 2$, och det gifves då högst $n - 2 - (m - 2) = n - m$ värden på h , för hvilka multipel-punkt kan förekomma.

Koordinaterna x och y för en multipel-punkt måste satisfiera såväl den komplexa primär-kurvans eqvation

$$(1) \quad f''(x) - \frac{y^2}{3!} f'''(x) + \frac{y^4}{5!} f^{(v)}(x) - \frac{y^6}{7!} f^{(vii)}(x) + \dots = 0,$$

som ock dess båda deriverade eqvationer, af hvilka den ena är

$$(2) \quad f''(x) - \frac{y^2}{3!} f^{(iv)}(x) + \frac{y^4}{5!} f^{(vi)}(x) - \frac{y^6}{7!} f^{(viii)}(x) + \dots = 0;$$

den andra kan skrivas

$$(3) \quad y \left[\frac{1}{3!} f'''(x) - \frac{2y^2}{5!} f^{(v)}(x) + \frac{3y^4}{7!} f^{(vii)}(x) - \dots \right] = 0$$

och således uppdelas i de tvenne

$$(4) \quad y = 0$$

och

$$(5) \quad \frac{1}{3!} f'''(x) - \frac{2y^2}{5!} f^{(v)}(x) + \frac{3y^4}{7!} f^{(vii)}(x) - \dots = 0.$$

Gör man $y = 0$ i eqv. (2), så blir denna

$$(6) \quad f'''(x) = 0.$$

Om således alla de $n - 2$ rötterna till denna sista eqvation äro reella, så äro kurvans alla multipel-punkter det äfven. Om blott m rötter till (6) äro reella, så äro af multipel-punkterna m reella och $n - m - 2$ komplexa, såvida nemligen de alla äro dubbla; eljest minskas det ena eller båda dessa tal, på sätt här ofvan visats.

De komplexa multipel-punkternas koordinater måste satisfiera eqvationerna (2) och (5). Dessa bilda tillhopa ett system, hvilket vi benämna Σ -systemet.

Rotpunkternas Platser.

§ 15.

Vi förutsätta i denna paragraf och den följande, att K -kurvan ej har någon multipel-punkt.

Antagom till en början, att alla de $n - 1$ rötterna till eqvationen $f'(z) = 0$ äro reella och olika. Vi beteckna dem, i ordning från höger till venster, med $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \dots, \varrho_{n-1}$.

K -kurvan består af $n - 1$ transversal-grenar, af hvilka den första, AA' , skär x -axeln i punkten ϱ_1 . Om $f(\varrho_1)$ är > 0 , finnes uppenbarligen en enda rot-punkt till eqv. $f(z) = 0$ på hvardera hälften af denna gren. Ty u eller X tenderar mot $-\infty$ vid hvardera af dess båda ändar, denna variabel kan ej vända, utan att $f'(z)$ genomgår origo, och har således blott ett maximum, $f(\varrho_1)$, under det z genomlöper hela grenen.

Ju mindre $f(\varrho_1)$ blir, desto mer närma sig dessa båda rotpunkter till punkten ϱ_1 , och för $f(\varrho_1) = 0$ sammanfalla de båda dermed, så att $z = \varrho_1$ blir en dubbel rot till eqv. $f(z) = 0$.

Är deremot $f(\varrho_1) < 0$, finnes uppenbarligen ingen rotpunkt på grenen AA' . Deremot ligger då en sådan på x -axeln till höger om ϱ_1 , ty u tenderar mot $+\infty$ vid ändan af denna axel. En annan dylik finnes mellan ϱ_1 och ϱ_2 , såframt nemligen $f(\varrho_2) > 0$. Blir deremot $f(\varrho_2) = 0$, så förenar sig denna sistnämnda rotpunkt med en annan, från venster kommande, till en dubbel rot i ϱ_2 . Slutligen, för $f(\varrho_2) < 0$, aflägsna sig dessa båda rotpunkter från hvarandra, följande hvarsin hälft af den transversal-gren, BB' , som genomgår ϱ_2 .

För hvarje annan transversal-gren kan samma slutledning upprepas, och resultatet uttryckas sålunda:

Om alla de $n - 1$ rötterna till den deriverade equationen äro reella och olika, består K -kurvan af $n - 1$ transversal-grenar;

Om vidare alla de värden på $f(z)$, som motsvara den deriverade equationens rotpunkter af udda ordningsnummer, äro negativa, och de, som motsvara rotpunkter af jemn, positiva, så äro alla rötterna till eqv. $f(z) = 0$ reella och till sina lägen alternerande med den deriverade equationens;

Om $f(z)$ blir noll i en af den deriverade equationens rotpunkter, så förena sig tvenne rötter till eqv. $f(z) = 0$ derstädes till en dubbel;

För hvarje positivt värde på $f(z)$, som motsvarar en rotpunkt af udda ordningsnummer till den deriverade equationen, och för hvarje negativt, som motsvarar en rotpunkt af jemn, är en komplex rotpunkt till eqv. $f(z) = 0$ belägen på hvardera hälften af den transversal-gren, som genomgår ifrågavarande rotpunkt till den deriverade equationen.

Är frågan endast om de reella rötternas antal och platser, kan resultatet uttryckas helt enkelt sålunda:

Om alla rötterna till eqv. $f'(z) = 0$ äro reella och olika, så äro rötterna till $f(z) = 0$ det äfven, såframt funktionens $f(z)$ alla maxima äro positiva, och minima negativa. För hvarje maximum eller minimum, som är $= 0$, blifva tvenne rötter lika. För hvarje positivt minimum eller negativt maximum blifva tvenne rötter komplexa.

§ 16.

Vi antaga nu, att $2m$ rötter till eqv. $f'(z) = 0$ äro komplexa, samt de öfriga $n - 2m - 1$ reella och olika. K -kurvan består då af m par lateral- och $n - 2m - 1$ transversal-grenar.

På hvarje lateral-gren finnes en enda rotpunkt till eqv. $f(z) = 0$. Ty, eftersom den ena af dess tillhörande asymptot-strålar är af jemn, den andra af udda ordningsnummer, så måste X eller u tendera mot $+\infty$ vid dess ena ända, mot $-\infty$ vid den andra; denna variabel kan ej vända, under det z genomlöper hela grenen, och har således derunder hvarken maximum eller minimum.

Genom en hvar af den deriverade equationens reella rotpunkter går en transversal-gren. De bland dessa grenar, hvilkas intersektionspunkter med x -axeln äro af udda ordningsnummer, hafva äfven asymptot-strålar af dylik nummer, och tvärtom. Följakt-

ligen kunna de öfriga $n - 2m$ rotpunkternas till eqv. $f(z) = 0$ platser bestämmas genom en slutledning, lika med den i föregående paragraf använda, och vi uppställa följande sats:

Om $2m$ rötter till den deriverade equationen äro komplexa, samt de öfriga reella och olika, består K -kurvan af $2m$ lateral- och $n - 2m - 1$ transversal-grenar;

På hvar och en af de förra finnes alltid en enda rotpunkt;

Om vidare alla de värden på $f(z)$, som motsvara den deriverade equationens reella rotpunkter af udda ordningsnummer, äro negativa, och de, som motsvara rotpunkter af jämn, positiva, så äro de öfriga $n - 2m$ rötterna till eqv. $f(z) = 0$ reella och till sina lägen alternerande med den deriverade equationens;

Om $f(z)$ blir noll i en af den deriverade equationens reella rotpunkter, så förena sig tvenne rötter till eqv. $f(z) = 0$ derstädes till en dubbel;

För hvarje positivt värde på $f(z)$, som motsvarar en reel rotpunkt af udda ordningsnummer till den deriverade equationen, och för hvarje negativt, som motsvarar en rotpunkt af jämn, är en komplex rotpunkt till eqv. $f(z) = 0$ belägen på hvardera hälften af den transversal-gren, som genomgår ifrågavarande rotpunkt till den deriverade equationen.

Är frågan endast om de reella rötternas antal och platser, kan resultatet uttryckas helt enkelt sålunda:

Om $2m$ rötter till eqv. $f'(z) = 0$ äro komplexa, samt de öfriga reella och olika, så äro alltid åtminstone $2m$ rötter till $f(z) = 0$ komplexa. De öfriga $n - 2m$ äro reella och olika, såframt funktionens $f(z)$ alla maxima äro positiva, och minima negativa. För hvarje maximum eller minimum, som är $= 0$, blifva tvenne rötter lika. För hvarje positivt minimum eller negativt maximum blifva tvenne rötter komplexa.

Af dessa satser framgår uppenbart, att en equations komplexa rötter i allmänhet äro af tvenne olika slag. De enas tillvaro beror på den deriverade equationens komplexa rötter; de äro lika många som dessa sednare; de äro belägna på lateral-grenar, och deras antal förändras ej, huru man än låter equationens parameter variera. Vi föreslå på grund häraf för dem benämningen *deriverade komplexa rötter*. De andra deremot, hvilka vi vilja kalla *egna komplexa rötter*, bero deremot af denna parameters värde; genom att förändra detsamma kan man godtyckligt öka eller minska deras antal inom vissa gränser; de äro belägna på transversal-grenar.

§ 17.

Antagom nu, att primär-kurvan har en m -faldig multipel-punkt S . Vi säga, att i den sammanträffa $2m$ halfgrenar af kurvan. Dess koordinater x och y satisfiera equations-systemerna

$$(1) \quad X' = Y' = 0,$$

$$(2) \quad X'' = Y'' = 0,$$

och så vidare till och med

$$(3) \quad X^{(m-1)} = Y^{(m-1)} = 0,$$

men deremot icke systemet

$$(4) \quad X^{(m)} = Y^{(m)} = 0.$$

Vi skola nu undersöka tecknet för det inkrement, som funktionen X eller, såsom vi kunna skrifva den, $X(x, y)$ erhåller, då z utgår från S , följande någon gren af kurvan.

På grund af såväl formlerna (1)–(4), som ock (3, 8) måste punktens S koordinater göra de $m - 1$ första differentialerna af X lika med noll för hvarje värde på α och således satisfiera eqvations-systemerna

$$(5) \quad \left(\frac{dX}{dx}\right) = \left(\frac{dX}{dy}\right) = 0,$$

$$(6) \quad \left(\frac{d^2X}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2X}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^2X}{dy^2}\right) = 0,$$

och så vidare till och med

$$(7) \quad \left(\frac{d^{m-1}X}{dx^{m-1}}\right) = \left(\frac{d^{m-1}X}{dx^{m-2}dy}\right) = \dots\dots = \left(\frac{d^{m-1}X}{dx\,dy^{m-2}}\right) = \left(\frac{d^{m-1}X}{dx^{m-1}}\right) = 0,$$

men deremot icke systemet

$$(8) \quad \left(\frac{d^mX}{dx^m}\right) = \left(\frac{d^mX}{dx^{m-1}dy}\right) = \dots\dots = \left(\frac{d^mX}{dx\,dy^{m-1}}\right) = \left(\frac{d^mX}{dy^m}\right) = 0.$$

Låta vi då $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ betyda koordinaterna för en punkt af primär-kurvan i närheten af S , så erhålles på grund af TAYLORS theorem

$$(9) \quad X(x + \Delta x, y + \Delta y) - X(x, y) = \frac{1}{m!} \left(\Delta x \frac{d}{dx} + \Delta y \frac{d}{dy} \right)^m X + \frac{1}{(m+1)!} \left(\Delta x \frac{d}{dx} + \Delta y \frac{d}{dy} \right)^{m+1} X + \dots\dots,$$

eller, om vi sätta

$$(10) \quad \Delta x = R \cos v, \quad \Delta y = R \sin v,$$

$$(11) \quad X(x + \Delta x, y + \Delta y) - X(x, y) = \frac{R^m}{m!} \left(\cos v \frac{d}{dx} + \sin v \frac{d}{dy} \right)^m X + R^{m+1} N,$$

der med N förstås en qvantitet, som åtminstone icke blir oändlig, då R tenderar mot noll.

Man kan uppenbarligen göra R nog litet, för att tecknet för eqvationens (11) venstra membrum, det vill säga det ifrågavarande inkrementet, må blifva detsamma som koëfficientens för $\frac{R^m}{m!}$ i det högra. På samma sätt som i § 7 kunna vi visa, att denna koëfficient tenderar, vid indefinit aftagande R , mot

$$(12) \quad \frac{d^m X}{ds^m}$$

eller

$$(13) \quad X^{(m)} \cos m\alpha - Y^{(m)} \sin m\alpha,$$

samt att således inkrementets tecken kan göras beroende af (13).

Den vinkel β , som tangenten till en gren af kurvan i punkten S bildar med x -axeln, skall, på grund af (7, 16), satisfiera eqvationen

$$(14) \quad \operatorname{tg} m\beta = - \frac{Y^{(m)}}{X^{(m)}},$$

ur hvilken man erhåller

$$(15) \quad Y^{(m)} = - \sin m\beta \sqrt{(X^{(m)})^2 + (Y^{(m)})^2}, \quad X^{(m)} = \cos m\beta \sqrt{(X^{(m)})^2 + (Y^{(m)})^2};$$

således kan expressionen (13) skrivas

$$(16) \quad \cos m(\alpha - \beta) \sqrt{(X^{(m)})^2 + (Y^{(m)})^2},$$

hvilken qvantitet, om i stället för α successivt insättes

$$(17) \quad \beta, \beta + \frac{\pi}{m}, \beta + \frac{2\pi}{m}, \beta + \frac{3\pi}{m}, \dots\dots,$$

för hvarje gång vexlar tecken. Alltså finner man, att

om z utgår från multipel-punkten, följande tvenne konsekutiva grenar af kurvan, så växer X eller u utefter den ena grenen, aftager utefter den andra.

§ 18.

På grund häraf inses nu lätt sanningen af följande sats:

Om u eller X är $= 0$ i en m -faldig multipel-punkt af den primära kurvan, så är densamme en m -faldig rotpunkt till eqv. $f(z) = 0$. Blir $u > 0$ i samma punkt, så kommer en enkel rotpunkt till samma equation på hvarannan af de i punkten sammanträffande $2m$ halfgrenarne. Blir $u < 0$ dersammastädes, så kommer en enkel rotpunkt på hvar och en af de öfriga half-grenarne.

Ligger multipel-punkten S på x -axeln, tillhöra endast $m - 1$ grenar K -kurvan, ty x -axeln sjelf är den m :te. Är då m udda $= 2l + 1$, så är klart, att, om X eller u växer utefter den från S utgående positiva x -axel-rigtningen, måste den aftaga utefter den negativa, och tvärtom. Således kan, i händelse X ej är $= 0$ i S , ej mer än en af de ifrågavarande $2l + 1$ rotpunkterna ligga på x -axeln, d. v. s. vara reel, och vi erhålla följande korollarium af föregående sats:

En $2l$ -faldig reel rot $z = \varrho$ till eqv. $f'(z) = 0$ minskar antalet af equationens $f(z) = 0$ reella rötter med $2l$, såframt icke $f(\varrho)$ är $= 0$, då ϱ är en $(2l + 1)$ -faldig rot till eqv. $f(z) = 0$.

Är deremot m jemnt $= 2l$, så är klart, att, om X eller u växer utefter den från S utgående positiva x -axel-rigtningen, måste den äfven växa utefter den negativa, och tvärtom. I förra fallet har u i S ett reelt minimum, i sednare fallet ett reelt maximum. Således måste, i händelse X ej är $= 0$ i S , antingen två eller ingen af de ifrågavarande $2l$ rotpunkterna ligga på x -axeln, d. v. s. vara reella, och vi erhålla följande andra korollarium af föregående sats:

En $(2l - 1)$ -faldig reel rot $z = \varrho$ till eqv. $f'(z) = 0$ minskar antalet af equationens $f(z) = 0$ reella rötter med $2l - 2$, om $f(\varrho)$ är ett positivt maximum eller negativt minimum, och med $2l$, om $f(\varrho)$ är ett negativt maximum eller positivt minimum; är deremot $f(\varrho) = 0$, så är ϱ en $2l$ -faldig rot till eqv. $f(z) = 0$.

Tillämpning på Numeriska Eqvationer.

§ 19.

Åtskiljandet af rotpunkterna till en framställd equation

$$(1) \quad f(z) = az^n + bz^{n-2} + cz^{n-3} + \dots + gz^2 + hz + k = 0, \quad (a > 0)$$

äfvensom bestämmandet af de olika platser, som dessa punkter successivt intaga, under det equationens parameter k växer kontinuerligt från $-\infty$ till $+\infty$, består af tvenne momenter, nemligen: 1) konstruktionen af den komplexa primär-kurvan, och 2) bestämmandet af funktionens $f(z)$ valörer för åtskilliga punkter af densamma.

Det förra momentet innebär den egentliga svårigheten.

För verkställandet af konstruktionen beräknar man först de reella rötterna till den deriverade eqvationen

$$(2) \quad f'(z) = 0,$$

som är af $(n - 1)$:sta graden; vi beteckna dessa rotpunkter, i ordning från höger till venster, med

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \dots;$$

dock utelemna vi här, likasom i andra dylika händelser, indicēs, om de ej äro nödvändiga.

Ifrågavarande rotpunkter äro K -kurvans intersektions-punkter med x -axeln; deras antal är lika med kurvans transversal-grenars.

Derefter bestämmer man kurvans intersektions-punkter med asymptot-strålarne. Dessa punkters radii vectores äro reella rötter till eqvationer af $(n - 3)$:dje graden. Vi beteckna dessa eqvationer, hvilka erhållas ur kurvans polar-eqvation genom att förkorta med r samt insätta i stället för p strålens $A, B, C, \dots$ argument, med $A(r) = 0, B(r) = 0, C(r) = 0, \dots$, respektive. Likaledes beteckna vi strålens A intersektions-punkter, i ordning från origo, äfvensom deras radii vectores, med

$$a_1, a_2, a_3, \dots;$$

strålens B med

$$b_1, b_2, b_3, \dots;$$

och så vidare.

I ganska många fall, och isynnerhet då eqvationens gradtal ej öfverstiger 5, äro, såsom följande exempel ådagalägga, kännedomen om dessa rotpunkter tillräcklig för utförandet af den komplexa primär-kurvans konstruktion. Skulle någon tvetydighet återstå, kan den i allmänhet lätt häfvas genom enkla artificier, för hvilka dock naturligtvis ingen generel regel kan uppställas. Men i hvarje fall vinnes alltid i sista instansen full visshet om kurvans form, genom att, på sätt vi i följande afdelning skola visa, undersöka de förändringar, den undergår, då man låter dess parameter variera.

Bestämmandet af funktionens $f(z)$ värden i punkterna $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \dots$ angifver såväl antalet och läget af den framställda eqvationens (1) reella rotpunkter, som ock på hvilka transversal-grenar dess komplexa äro belägna. På hvarje lateral-gren ligger, som bekant, alltid en enda rotpunkt.

Bestämmandet af samma funktions värden i asymptot-strålarnes intersektions-punkter angifver slutligen, inom hvilka intervaller den framställda eqvationens komplexa rotpunkter äro belägna.

Vi beteckna funktionens $f(z)$ valörer i punkterna

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \dots \quad \text{med } (\varrho_1), (\varrho_2), (\varrho_3), \dots;$$

$$a_1, a_2, a_3, \dots \quad \text{» } (a_1), (a_2), (a_3), \dots;$$

och så vidare.

K -kurvans komplexa multipel-punkter, betraktade såsom rotpunkter till den deriverade eqvationen, beteckna vi med

$$S_1, S_2, S_3, \dots;$$

funktionens $f(z)$ valörer i samma punkter med

$$(S_1), (S_2), (S_3), \dots .$$

§ 20.

Ex. 1. Att finna rotpunkternas till eqvationen

$$f(z) = z^5 - 15z^3 + 5z^2 + 50z + k = 0$$

platser för olika värden på parametern k .

Den deriverade eqvationen

$$z^4 - 9z^2 + 2z + 10 = 0$$

har fyra reella rötter, nemligen

$$\varrho_1 = +2,59773; \varrho_2 = +1,31955; \varrho_3 = -1; \varrho_4 = -2,91728;$$

följaktligen består K -kurvan af fyra transversal-grenar. Af samma skäl kan vår eqvation ej hafva några deriverade komplexa rötter.

Ur den primära kurvans eqvation

$$r^5 \sin 5p - 15r^3 \sin 3p + 5r^2 \sin 2p + 50r \sin p + k = 0$$

erhålles

$$A(r) = -15r^2 \sin \frac{3\pi}{5} + 5r \sin \frac{2\pi}{5} + 50 \sin \frac{\pi}{5},$$

$$B(r) = -15r^2 \sin \frac{6\pi}{5} + 5r \sin \frac{4\pi}{5} + 50 \sin \frac{2\pi}{5};$$

samt följaktligen

$$a = 1,61161; d = 1,27828.$$

Alltså kan kurvan ej hafva någon annan form, än den fig. 16 utvisar.

Substitution gifver

$$(\varrho_1) = k + 18,973; (\varrho_2) = k + 44,219; (\varrho_3) = k - 31;$$

$$(\varrho_4) = k + 57,806; (a) = k + 77,734; (d) = k - 55,451;$$

och således kan man genom följande högst enkla slutledning finna rotpunkternas platser.

Då k är $< -77,734$, äro alla sex substitutions-resultaterna negativa.

Emedan $f(z)$ är negativ i ϱ_1 , men positiv längre åt höger på x -axeln, måste en reel rotpunkt ligga till höger om ϱ_1 .

Emedan $f(z)$ är negativ i a , men blir förr eller sednare positiv, om man följer transversal-grenen BB' uppåt, så ligger en komplex rotpunkt på denna gren i intervallet AB . En dermed symmetrisk ligger naturligtvis nedanför x -axeln.

Emedan $f(z)$ är negativ i ϱ_4 , men blir förr eller sednare positiv, om man följer transversal-grenen DD' uppåt, så ligger en komplex rotpunkt på denna gren i intervallet DX' . En dermed symmetrisk ligger nedanför x -axeln.

Dermed äro alla fem rotpunkternas platser bestämda för $k < -77,734$.

Då k blir $= -77,734$, är $(a) = 0$. Således ligger då en rotpunkt i a , uppenbarligen densamme, som förut var belägen i intervallet AB . Då k ytterligare växer, flyttar sig samme rotpunkt in i intervallet XA , alltjemt följande grenen BB' .

Det fullständiga resultatet af den på samma sätt fortsatta diskussionen innehålles i följande

Tabell I.

Vilkor.	Reella Rötters Antal.	Reella Rötters Platser.	Komplexa Rötters Platser.			
			Grenar.		Intervaller.	
$-77,734 > k$	1	 ϱ_1, r_1	BB'	DD'	AB	DX'
$k = -77,734$	1	 ϱ_1, r_1	BB'	DD'	a	DX'
$-57,806 > k > -77,734$	1	 ϱ_1, r_1	BB'	DD'	XA	DX'
$k = -57,806$	3(2)	$r_5 = \varrho_4 = r_4$ ϱ_1, r_1	BB'		XA	
$-44,219 > k > -57,806$	3	$r_5, \varrho_4, r_4, \varrho_3$ ϱ_1, r_1	BB'		XA	
$k = -44,219$	5(2)	$r_5, \varrho_4, r_4, \varrho_3, r_3 = \varrho_2 = r_2, \varrho_1, r_1$				
$-18,973 > k > -44,219$	5	$r_5, \varrho_4, r_4, \varrho_3, r_3, \varrho_2, r_2, \varrho_1, r_1$				
$k = -18,973$	5(2)	$r_5, \varrho_4, r_4, \varrho_3, r_3, \varrho_2, r_2 = \varrho_1 = r_1$				
$+31 > k > -18,973$	3	$r_5, \varrho_4, r_4, \varrho_3, r_3, \varrho_2$	AA'		XA	
$k = +31$	3(2)	$r_5, \varrho_4, r_4 = \varrho_3 = r_3$	AA'		XA	
$+55,451 > k > +31$	1	r_5, ϱ_4	AA'	CC'	XA	DX'
$k = +55,451$	1	r_5, ϱ_4	AA'	CC'	XA	d
$k > +55,451$	1	r_5, ϱ_4	AA'	CC'	XA	CD

Med en sådan beteckning, som 3(2) i andra kolumnen, uttrycka vi, att eqvationen har 3 reella rötter, af hvilka två äro lika.

§ 21.

Ex. 2. Att på samma sätt undersöka eqvationen

$$f(z) = z^5 + 15z^3 + 5z^2 + 50z + k = 0.$$

Den deriverade eqvationen

$$z^4 + 9z^2 + 2z + 10 = 0$$

har ingen reel rot. Den komplexa primär-kurvan består således af två par lateral-grenar, såframt multipel-punkt ej förefinnes. Den framställda eqvationen har två par deriverade komplexa rötter.

Ur den primära kurvans eqvation

$$r^5 \sin 5p + 15r^3 \sin 3p + 5r^2 \sin 2p + 50r \sin p = 0$$

erhålles

$$b = 2,49501; \quad c = 2,16168.$$

Häraf kan man blott sluta till, att kurvan måste hafva någon af de former, som fig. 24—26 utvisa. Att i sjelfva verket den första af dem här är den rätta, kan naturligtvis på åtskilliga sätt visas, lättast dock måhända på det i § 30 här nedan angifna.

Substitution gifver

$$(b) = k - 78,425; \quad (c) = k + 23,077.$$

Tabell II.

Vilkor.	Reella Rötters Antal.	Reella Rötters Platser.	Komplexa Rötters Platser.	
			Grenar.	Intervaller.
$-23,077 > k$	1	0, r	BC, AD	BC, CD
$k = -23,077$	1	0, r	BC, AD	BC, c
$0 > k > -23,077$	1	0, r	BC, AD	$(BC)^2$
$k = 0$	1	$0 = r$	BC, AD	$(BC)^2$
$+78,425 > k > 0$	1	$r, 0$	BC, AD	$(BC)^2$
$k = +78,425$	1	$r, 0$	BC, AD	b, BC
$k > +78,425$	1	$r, 0$	BC, AD	AB, BC

Med beteckningen $(BC)^2$ i sista kolumnen utmärka vi, att två rotpunkter ligga i intervallet BC .

§ 22.

Ex 3. $f(z) = z^6 + z^4 - 2z^3 + 3z^2 + k = 0$.

Den deriverade eqvationen

$$3z^5 + 2z^3 - 3z^2 + 3z = 0$$

har blott en reel rot, nemligen

$$\varrho = 0;$$

följaktligen består K -kurvan af en transversal- och två par lateral-grenar, såframt multipel-punkt ej förefinnes.

Man erhåller vidare

$$b = d = 1,73205.$$

Emedan, såsom man lätt kan öfvertyga sig, transversal-grenen är belägen till venster om y -axeln, måste kurvan hafva den form, fig. 37 utvisar, såframt icke denna sistnämnda gren är förbunden med lateral-grenarne $DE, D'E'$ genom multipel-punkter. Att det sednare dock ej är händelsen, kan man lätt visa, t. ex. på grund deraf, att till venster om y -axeln kunna dragas rätta linier, parallela dermed, utan att råka kurvan.

Substitution gifver

$$(\varrho) = k; (b) = k + 28,392; (d) = k + 7,607.$$

Tabell III.

Vilkor.	Reella Rötters Antal.	Reella Rötters Platser.	Egna Komplexa Rötter.		Deriverade Komplexa Rötter.	
			Grenar.	Intervaller.	Grenar.	Intervaller.
$-28,392 > k$	2	r_2, ϱ, r_1	—	—	AB, DE	BC, CD
$k = -28,392$	2	r_2, ϱ, r_1	—	—	AB, DE	b, CD
$-7,607 > k > -28,392$	2	r_2, ϱ, r_1	—	—	AB, DE	AB, CD
$k = -7,607$	2	r_2, ϱ, r_1	—	—	AB, DE	AB, d
$0 > k > -7,607$	2	r_2, ϱ, r_1	—	—	AB, DE	AB, DE
$k = 0$	2(2)	$r_2 = \varrho = r_1$	—	—	AB, DE	AB, DE
$k > 0$	0	—	CC'	CD	AB, DE	AB, DE

§ 23.

Ex. 4. $f(z) = 15z^8 - 364z^6 + 420z^5 + 1750z^4 - 3640z^3 + 2520z^2 - 720z + k = 0$.

Den deriverade eqvationen har sju reella rötter, nemligen

$$\varrho_1 = + 2,89301; \quad \varrho_2 = + 2,08017; \quad \varrho_3 = + 0,68543; \quad \varrho_4 = + 0,53752; \quad \varrho_5 = + 0,28310;$$

$$\varrho_6 = - 2,27164; \quad \varrho_7 = - 4,20761;$$

följaktligen består K -kurvan af sju transversal-grenar.

Man finner vidare

$$a_1 = 0,27967; \quad a_2 = 0,55497; \quad a_3 = 0,95110; \quad a_4 = 2,55733; \quad b_1 = 0,28621; \quad b_2 = 0,68385; \quad b_3 = 1,88389;$$

$$c_1 = 0,32582; \quad c_2 = 1,10030; \quad d = 0,43986; \quad e = 0,86441; \quad g = 2,83552;$$

alltså har kurvan den form, fig. 52 utvisar.

Substitution gifver

$$(\varrho_1) = k - 1229,81; \quad (\varrho_2) = k + 1535,18; \quad (\varrho_3) = k - 68,952; \quad (\varrho_4) = k - 67,965; \quad (\varrho_5) = k - 72,636;$$

$$(\varrho_6) = k + 39121,1; \quad (\varrho_7) = k - 232841; \quad (a_1) = k - 77,284; \quad (a_2) = k - 59,520; \quad (a_3) = k - 163,825;$$

$$(a_4) = k + 13630,9; \quad (b_1) = k - 97,681; \quad (b_2) = k + 48,553; \quad (b_3) = k - 10460,0; \quad (c_1) = k - 161,504;$$

$$(c_2) = k + 2156,08; \quad (d) = k - 419,212; \quad (e) = k - 3564,66; \quad (g) = k + 148525.$$

Tabell IV.

Vilkor.	Reella Rötters Antal.	Reella Rötters Platser.	Komplexa Rötters Platser.	
			Grenar.	Intervaller.
$-148525 > k$	2	$r_8, q_7 \dots \dots \dots q_1, r_1$	BB', DD', FF'	AB, CD, FG
$k = -148525$	2	$r_8, q_7 \dots \dots \dots q_1, r_1$	BB', DD', FF'	AB, CD, g
$-39121,1 > k > -148525$	2	$r_8, q_7 \dots \dots \dots q_1, r_1$	BB', DD', FF'	AB, CD, GX'
$k = -39121,1$	4(2)	$r_4, q_7, r_7 = q_6 = r_6 \dots \dots \dots q_1, r_1$	BB', DD'	AB, CD
$-13630,9 > k > -39121,1$	4	$r_8, q_7, r_7, q_6, r_6, q_5 \dots \dots \dots q_1, r_1$	BB', DD'	AB, CD
$k = -13630,9$	4	$r_8, q_7, r_7, q_6, r_6, q_5 \dots \dots \dots q_1, r_1$	BB', DD'	a_4, CD
$-2156,08 > k > -13630,9$	4	$r_8, q_7, r_7, q_6, r_6, q_5 \dots \dots \dots q_1, r_1$	BB', DD'	XA, CD
$k = -2156,08$	4	$r_8, q_7, r_7, q_6, r_6, q_5 \dots \dots \dots q_1, r_1$	BB', DD'	XA, c_2
$-1535,18 > k > -2156,08$	4	$r_8, q_7, r_7, q_6, r_6, q_5 \dots \dots \dots q_1, r_1$	BB', DD'	XA, BC
$k = -1535,18$	6(2)	$r_8, q_7, r_7, q_6, r_6, q_5 \dots \dots \dots r_3 = q_2 = r_2, q_1, r_1$	DD'	BC
$-48,553 > k > -1535,18$	6	$r_8, q_7, r_7, q_6, r_6, q_5 \dots \dots \dots q_3, r_3, q_2, r_2, q_1, r_1$	DD'	BC
$k = -48,553$	6	$r_8, q_7, r_7, q_6, r_6, q_5 \dots \dots \dots q_3, r_3, q_2, r_2, q_1, r_1$	DD'	b_2
$+59,520 > k > -48,553$	6	$r_8, q_7, r_7, q_6, r_6, q_5 \dots \dots \dots q_3, r_3, q_2, r_2, q_1, r_1$	DD'	AB
$k = +59,520$	6	$r_8, q_7, r_7, q_6, r_6, q_5 \dots \dots \dots q_3, r_3, q_2, r_2, q_1, r_1$	DD'	a_2
$+67,965 > k > +59,520$	6	$r_8, q_7, r_7, q_6, r_6, q_5 \dots \dots \dots q_3, r_3, q_2, r_2, q_1, r_1$	DD'	XA
$k = +67,965$	8(2)	$r_8, q_7, r_7, q_6, r_6, q_5, r_5 = q_4 = r_4, q_3, r_3, q_2, r_2, q_1, r_1$	—	—
$+68,952 > k > +67,965$	8	$r_8, q_7, r_7, q_6, r_6, q_5, r_5, q_4, r_4, q_3, r_3, q_2, r_2, q_1, r_1$	—	—
$k = +68,952$	8(2)	$r_8, q_7, r_7, q_6, r_6, q_5, r_5, q_4, r_4 = q_3 = r_3, q_2, r_2, q_1, r_1$	—	—
$+72,636 > k > +68,952$	6	$r_8, q_7, r_7, q_6, r_6, q_5, r_5, q_4 \dots \dots \dots q_2, r_2, q_1, r_1$	CC'	XA
$k = +72,636$	6(2)	$r_7, q_7, r_7, q_6, r_6, q_5 = r_5 \dots \dots \dots q_2, r_2, q_1, r_1$	CC'	XA
$+77,284 > k > +72,636$	4	$r_8, q_7, r_7, q_6 \dots \dots \dots q_2, r_2, q_1, r_1$	CC', EE'	$(XA)^2$
$k = +77,284$	4	$r_8, q_7, r_7, q_6 \dots \dots \dots q_2, r_2, q_1, r_1$	CC', EE'	XA, a_1
$+97,681 > k > +77,284$	4	$r_8, q_7, r_7, q_6 \dots \dots \dots q_2, r_2, q_1, r_1$	CC', EE'	XA, AB
$k = +97,681$	4	$r_8, q_7, r_7, q_6 \dots \dots \dots q_2, r_2, q_1, r_1$	CC', EE'	XA, b_1
$+161,504 > k > +97,681$	4	$r_8, q_7, r_7, q_6 \dots \dots \dots q_2, r_2, q_1, r_1$	CC', EE'	XA, BC
$k = +161,504$	4	$r_8, q_7, r_7, q_6 \dots \dots \dots q_2, r_2, q_1, r_1$	CC', EE'	XA, c_1
$+163,825 > k > +161,504$	4	$r_8, q_7, r_7, q_6 \dots \dots \dots q_2, r_2, q_1, r_1$	CC', EE'	XA, CD
$k = +163,825$	4	$r_8, q_7, r_7, q_6 \dots \dots \dots q_2, r_2, q_1, r_1$	CC', EE'	a_3, CD
$+419,212 > k > +163,825$	4	$r_8, q_7, r_7, q_6 \dots \dots \dots q_2, r_2, q_1, r_1$	CC', EE'	AB, CD
$k = +419,212$	4	$r_8, q_7, r_7, q_6 \dots \dots \dots q_2, r_2, q_1, r_1$	CC', EE'	AB, d
$+1229,81 > k > +419,212$	4	$r_8, q_7, r_7, q_6 \dots \dots \dots q_2, r_2, q_1, r_1$	CC', EE'	AB, DE
$k = +1229,81$	4(2)	$r_8, q_7, r_7, q_6 \dots \dots \dots r_2 = q_1 = r_1$	CC', EE'	AB, DE
$+3564,66 > k > +1229,81$	2	$r_8, q_7, r_7, q_6 \dots \dots \dots$	AA', CC', EE'	XA, AB, DE
$k = +3564,66$	2	$r_8, q_7, r_7, q_6 \dots \dots \dots$	AA', CC', EE'	XA, AB, e
$+10460,0 > k > +3564,66$	2	$r_8, q_7, r_7, q_6 \dots \dots \dots$	AA', CC', EE'	XA, AB, EF
$k = +10460,0$	2	$r_8, q_7, r_7, q_6 \dots \dots \dots$	AA', CC', EE'	XA, b_3, EF
$+232841 > k > +10460,0$	2	$r_8, q_7, r_7, q_6 \dots \dots \dots$	AA', CC', EE'	XA, BC, EF
$k = +232841$	2(2)	$r_8 = q_7, r_7 \dots \dots \dots$	AA', CC', EE'	XA, BC, EF
$k > +232841$	0	$\dots \dots \dots$	AA', CC', EE', GG'	XA, BC, EF, GX'

§ 24.

Ex. 5. $z^8 - z^5 + k = 0$.

Den deriverade eqvationen

$$8z^7 - 5z^4 = 0$$

gifver

$$\varrho_1 = 0,85499; \quad \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_4 = \varrho_5 = 0.$$

K -kurvan har alltså en fyrdubbel punkt i origo. Emedan den äfven har en transversal-gren AA' , inga intersektions-punkter finnas på asymptot-strålarne, och tangenterna till de i origo sammanträffande grenarne skola bilda vinklarne $\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}$ med x -axeln, så måste dessa grenar ligga i intervallerna AB, CD, DE och FG , samt hafva till asymptoter strålarne B, C, D och G , respektive. Således har kurvan det utseende, fig. 64 angifver.

Substitution gifver

$$(\varrho_1) = k - 0,17132; \quad (\varrho_2) = (\varrho_3) = (\varrho_4) = (\varrho_5) = k.$$

Tabell V.

Vilkor.	Reella Rötters Antal.	Reella Rötters Platser.	Komplexa Rötters Platser.	
			Grenar.	Intervaller.
$0 > k$	2	r_6, ϱ_5	OB	AB, DE, EF
$k = 0$	6(5)	$r_6 = \varrho_6 = r_5 = \varrho_4 = r_4 = \varrho_3 = r_3 = \varrho_2 = r_2, \varrho_1, r_1$	EF	EF
$+ 0,17132 > k > 0$	2	$\varrho_2, r_2, \varrho_1, r_1$	OC, EF, OG	CD, EF, FG
$k > + 0,17132$	2(2)	$r_2 = \varrho_1 = r_1$	OC, EF, OG	CD, EF, FG
$k > + 0,17132$	0		AA', OC, EF, OG	XA, CD, EF, FG

§ 25.

Ex. 6. $f(z) = z^8 - z^4 + k = 0$.

Den deriverade eqvationen

$$2z^7 - z^3 = 0$$

gifver

$$\left. \begin{matrix} \varrho_1 \\ \varrho_5 \end{matrix} \right\} = \pm 0,84089; \quad \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_4 = 0.$$

Den komplexa primär-kurvans eqvation

$$2x^7 - 14x^5y^2 + 14x^3y^4 - 2xy^6 - x^3 + xy^2 = 0$$

visar, att kurvan innehåller såsom beståndsdelar strålarne B, D och F . Efter division med $x(y^2 - x^2)$ återstår som qvot

$$2x^4 - 12x^2y^2 + 2y^4 = 1,$$

hvidan man finner, att kurvan måste hafva den form, fig. 72 utvisar. Utom den tredubbla punkten i origo har den således äfven ett par komplexa dubbel-punkter, nemligen

$$S = \pm 0,84089 i.$$

Substitution gifver

$$(\varrho_1) = (\varrho_5) = (S) = k - 0,25; \quad (\varrho_2) = k.$$

Tabell VI.

Vilkor.	Reella Rötters Antal.	Reella Rötters Platser.	Komplexa Rötters Platser.		
			Grenar.	Intervaller.	
$0 > k$	2	$r_6, \varrho_6 \dots \dots \dots \varrho_1, r_1$	$B \quad D \quad F$	$B \quad D \quad F$	
$k = 0$	6(4)	$r_6, \varrho_6, r_5 = \varrho_4 = r_4 = \varrho_3 = r_3 = \varrho_2 = r_2, \varrho_1, r_1$	D	D	
$+ 0,25 > k > 0$	4	$r_6, \varrho_6, r_5, \varrho_4 \dots \dots \dots \varrho_2, r_2, \varrho_1, r_1$	$((D))$	$((D))$	
$k = + 0,25$	4(2,2)	$r_6 = \varrho_6 = r_5 \dots \dots \dots r_2 = \varrho_1 = r_1$	$((S))$	$((S))$	
$k > + 0,25$	0	$\dots \dots \dots$	AA', CS, SE, GG'	XA, CD, DE, GX'	

Med beteckningen $((D))$ uttrycka vi, att tvenne rotpunkter ligga på linien D ; med $((S))$, att de förena sig i S .

Tillämpning på Numeriska Ekvationers Komplexa Primär-kurvor.

§ 26.

Konstruktionen af den komplexa primär-kurvan till en framställd eqvation

$$(1) \quad f(z) = az^n + bz^{n-2} + cz^{n-3} + \dots + gz^2 + hz + k = 0, \quad (a > 0)$$

äfvensom bestämmandet af de olika former, den successivt antager, under det dess parameter h växer kontinuerligt från $-\infty$ till $+\infty$, består af tvenne momenter, nemligen: 1) uppsökandet af dess multipel-punkter och tangerings-punkter med asymptotstjernans strålar och 2) bestämmandet af funktionens K värden i dessa punkter.

Det förra momentet innebär den egentliga svårigheten.

För verkställandet af konstruktionen beräknar man först de reella rötterna till den andra deriverade eqvationen

$$(2) \quad f''(z) = 0,$$

som är af $(n-2)$:dra graden; vi beteckna dessa rotpunkter, i ordning från höger till venster, med

$$(3) \quad \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots;$$

de äro kurvas reella multipel-punkter.

Äro alla rötterna till eqv. (2) reella, så har kurvan inga komplexa multipel-punkter. I motsatt fall har man, för att finna dessa sednare, att bilda Σ -systemet

$$(4) \quad f''(x) - \frac{y^2}{3!} f^{iv}(x) + \frac{y^4}{5!} f^{vi}(x) - \dots = 0,$$

$$(5) \quad \frac{1}{3!} f'''(x) - \frac{2y^2}{5!} f^v(x) + \frac{3y^4}{7!} f^{vii}(x) - \dots = 0,$$

samt beräkna de reella systemer af värden på x och y , som satisfiera detsamma. Hvarje sådant system ger en komplex multipel-punkt. Vi beteckna dem med $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \dots$

Eqvationen (4) är af graden $n-2$ i x , och af graden

$$\left. \begin{array}{l} \frac{n-2}{2} \\ \frac{n-3}{2} \end{array} \right\} \text{ i } y^2, \text{ allteftersom } n \text{ är } \left\{ \begin{array}{l} \text{jemnt.} \\ \text{udda.} \end{array} \right.$$

Eqvationen (5) är af graden $n - 3$ i x , och af graden

$$\left. \begin{array}{l} \frac{n-4}{2} \\ \frac{n-3}{2} \end{array} \right\} \text{ i } y^2, \text{ allteftersom } n \text{ är } \begin{cases} \text{jemnt.} \\ \text{udda.} \end{cases}$$

Alltså blir, åtminstone enligt regeln ¹⁾, efter elimination af y^2 Σ -systemets resultant af graden $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ i x .

Derefter bestämmer man kurvans tangerings-punkter med asymptot-strålarne. Emedan en tangerings-punkt är en sådan, i hvilken åtminstone två intersektions-punkter förena sig till en, och dessa sednares radii vectores äro de reella rötterna till de eqvationer, vi här ofvan betecknat med

$$(6) \quad A(r) = 0, \quad B(r) = 0, \quad C(r) = 0, \quad \dots, \quad$$

så äro tangerings-punkternas radii vectores just de reella mångfaldiga rötter, som eqvationerna (6) kunna hafva, under det parametern h varierar; de erhållas alltså ur eqvationerna

$$(7) \quad A'(r) = 0, \quad B'(r) = 0, \quad C'(r) = 0, \quad \dots, \quad$$

hvilka äro af $(n - 4)$:de graden.

Vi beteckna strålens A tangerings-punkter, i ordning från origo, äfvensom deras radii vectores med

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots;$$

strålens B med

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots;$$

och så vidare.

För att afgöra, på hvilkendera sidan om asymptot-strålen kurvan vid tangeringen är belägen, undersöka vi tecknet för derivatan $\left(\frac{\partial K}{\partial p}\right)$ i den ifrågavarande tangerings-punkten. Är det positivt, så växer funktionen K derstädes på samma gång som argumentet p ; är det negativt, så är förhållandet motsatt. I båda fallen kan man alltså med lätthet afgöra, på hvilkendera sidan om asymptot-strålen det positiva fältet är beläget.

Bestämmandet af funktionens K värden i multipel-punkterna angifver såväl de värden på parametern h , för hvilka kurvan kan hafva dylika punkter, som ock antalet positiva fält, som den, för hvilket värde som helst på h , innesluter.

Bestämmandet af samma funktions värden i asymptot-strålarnes tangerings-punkter angifver såväl de värden på parametern h , för hvilka kurvan tangerar dessa strålar, som ock dess läge i anseende till dem för hvilket värde som helst på h .

Vi beteckna funktionens K valörer i

$$\begin{array}{ll} \text{punkterna } \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots & \text{med } (\sigma_1), (\sigma_2), (\sigma_3), \dots; \\ \text{» } \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \dots & \text{» } (\Sigma_1), (\Sigma_2), (\Sigma_3), \dots; \\ \text{» } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots & \text{» } (\alpha_1), (\alpha_2), (\alpha_3), \dots; \end{array}$$

och så vidare.

¹⁾ Se t. ex. SALMON, Algebra d. linearen Transformationen. Deutsch bearb. von FIEDLER. Pag. 58.

§ 27.

Som man finner, är det endast Σ -systemets solution, som kan förorsaka någon egentlig svårighet. De vidlyftiga räkningar, som stundom dertill erfordras, kan man emedlertid ganska ofta genom åtskilliga artificier undvika. Bland dessa anför vi här endast ett, dels emedan detta kommer att i det följande användas, dels emedan det grundar sig på ett theorem, som redan i och för sig är af stor vikt. Detta theorem lyder sålunda:

Då K -kurvans till equationen $f(z) = 0$ parameter växer indefinit åt det negativa eller positiva hållet, måste alltid den deriverade equationens komplexa rotpunkter till sist komma att ligga i sådana fält, der funktionen K är negativ eller positiv, respektive.

Antaga vi nemligen, såsom förut,

$$(1) \quad f(z) = az^n + bz^{n-2} + cz^{n-3} + \dots + gz^2 + hz + k, \quad (a > 0)$$

så måste den deriverade equationens rotpunkters koordinater satisfiera equations-systemet

$$(2) \quad nar^{n-1} \cos(n-1)p + (n-2)br^{n-3} \cos(n-3)p + (n-3)cr^{n-4} \cos(n-4)p + \dots + \\ + 2gr \cos p + h = 0,$$

$$(3) \quad nar^{n-1} \sin(n-1)p + (n-2)br^{n-3} \sin(n-3)p + (n-3)cr^{n-4} \sin(n-4)p + \dots + \\ + 2gr \sin p = 0.$$

Asymptot-stjernan till den kurva, som representerar equationen (3), har $2(n-1)$ strålar, af hvilka tvenne närliggande alltid bilda vinkeln $\frac{\pi}{n-1}$ med hvarandra.

Då h växer indefinit åt det negativa hållet, aflägsna sig den deriverade equationens komplexa rotpunkter indefinit från origo, följande grenar af kurvan (3), hvilkas asymptot-stråles vinkel mot x -axeln är

$$\frac{2m\pi}{n-1}; \quad (m \text{ helt tal, ej noll})$$

följaktligen kan h alltid tagas tillräckligt numeriskt stort, för att en dylik rotpunkts, hvilken som helst, argument p må afvika huru litet som helst från detta sistnämnda värde, och således $\cos(n-1)p$ huru litet som helst från $\cos 2m\pi$ eller 1. Följaktligen kan eqv. (2), hvilken vi ju äfven kunna skriva

$$(4) \quad na \cos(n-1)p + (n-2) \frac{b}{r^2} \cos(n-3)p + \dots + 2 \frac{g}{r^{n-2}} \cos p + \frac{h}{r^{n-1}} = 0,$$

sättas under formen

$$(5) \quad na(1 + \delta) + \frac{M}{r^2} + \frac{h}{r^{n-1}} = 0,$$

då med δ och M förstås tvenne reella quantiteter, af hvilka den förra tenderar mot noll, och den sednare åtminstone icke blir oändligt stor, då h och r växa indefinit. Går man nu öfver till limes, erhålles af (5)

$$(6) \quad na + \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{h}{r^{n-1}} = 0.$$

Vi skola nu undersöka det tecken, som funktionen K eller

$$(7) \quad ar^{n-1} \frac{\sin np}{\sin p} + br^{n-3} \frac{\sin(n-2)p}{\sin p} + \dots + gr \frac{\sin 2p}{\sin p} + h$$

antager för ifrågavarande h , r och p . Emedan r alltid är positivt, har denna funktion samma tecken som

$$(8) \quad a \frac{\sin np}{\sin p} + \frac{b}{r^2} \frac{\sin(n-2)p}{\sin p} + \dots + \frac{g}{r^{n-2}} \frac{\sin 2p}{\sin p} + \frac{h}{r^{n-1}},$$

hvilken, eftersom

$$(9) \quad \frac{\sin \frac{2mn\pi}{n-1}}{\sin \frac{2m\pi}{n-1}} \text{ är } = 1,$$

uppenbarligen kan skrivas

$$(10) \quad a(1 + \varepsilon) + \frac{N}{r^2} + \frac{h}{r^{n-1}},$$

då med ε och N förstås reella qvantiteter, af hvilka den förra tenderar mot noll, och den sednare åtminstone icke blir oändligt stor, då h och r växa indefinit. Går man nu öfver till limes, blir (10)

$$(11) \quad a + \lim \frac{h}{r^{n-1}},$$

det är, på grund af (6),

$$(12) \quad (1 - n)a,$$

som uppenbarligen är negativ. Dermed är förra delen af theoremet bevisad.

Då deremot h växer indefinit åt det positiva hållet, aflägsna sig den deriverade eqvationens komplexa rotpunkter indefinit från origo, följande grenar af kurvan (3), hvilkas asymptot-stråles vinkel mot x -axeln är

$$\frac{(2m-1)\pi}{n-1}; \quad (m \text{ helt tal, ej noll})$$

följaktligen kan h alltid tagas tillräckligt stort, för att en dylik rotpunkts, hvilken som helst, argument p må afvika huru litet som helst från detta sistnämnda värde, och således $\cos(n-1)p$ huru litet som helst från $\cos(2m-1)\pi$ eller -1 . Följaktligen kan eqvationen (2) sättas under formen

$$(13) \quad -na(1 + \delta) + \frac{M}{r^2} + \frac{h}{r^{n-1}} = 0,$$

då med δ och M förstås samma slags qvantiteter som här ofvan. Går man nu öfver till limes, erhålles af (13)

$$(14) \quad -na + \lim \frac{h}{r^{n-1}} = 0.$$

Vi skola nu undersöka det tecken, som funktionen (8) antager för ifrågavarande h , r och p . Eftersom

$$(15) \quad \frac{\sin \frac{(2m-1)n\pi}{n-1}}{\sin \frac{(2m-1)\pi}{n-1}} \text{ är } = -1,$$

kan densamma uppenbarligen skrivas

$$(16) \quad -a(1 + \varepsilon) + \frac{N}{r^2} + \frac{h}{r^{n-1}} = 0,$$

då med ε och N förstås samma slags qvantiteter som här ofvan. Går man nu öfver till limes, blir (16)

$$(17) \quad -a + \lim \frac{h}{r^{n-1}} = 0,$$

det är, på grund af (14),

$$(18) \quad (n-1)a,$$

som uppenbarligen är positiv. Dermed är äfven sednare delen af theoremet bevisad.

§ 28.

Det är i sjelfva verket equationens $f'(z) = 0$ deriverade komplexa rotpunkter, hvilka, vid sin öfvergång från negativt till positivt fält, bilda K -kurvans komplexa multipel-punkter.

Ty antagom, att eqv. $f''(z) = 0$ har m komplexa rötter, och således eqv. $f'(z) = 0$ lika många deriverade komplexa, samt att K -kurvans alla komplexa multipel-punkter äro dubbla och följaktligen till antalet m . Enhvar af equationens $f'(z) = 0$ deriverade komplexa rotpunkter måste, under det h växer från $-\infty$ till $+\infty$, åtminstone en gång passera K -kurvan för att kunna öfvergå från negativt till positivt fält. Vid hvarje sådan öfvergång uppkommer en multipel-punkt i K -kurvan, och denne måste vara komplex, ty den ifrågavarande rotpunkten träffar under sin rörelse aldrig x -axeln. Ingen af de ifrågavarande komplexa rotpunkterna kan passera K -kurvan mer än en gång, ty derigenom skulle denna kurva, under parameterens h växande, komma att hafva flere än m komplexa multipel-punkter.

Antagom vidare, under i öfrigt samma förutsättningar som nyss, att ett par af K -kurvans komplexa multipel-punkter äro m' -faldiga, de öfriga $m - 2m' + 2$ dubbla. De förra äro, som bekant, $(m' - 1)$ -faldiga rotpunkter till eqv. $f'(z) = 0$; vid passagen genom desamma öfvergå $2m' - 2$ af denna equations deriverade komplexa rotpunkter från negativt till positivt fält. Ty i annat fall, äfvensom i händelse någon eller några af equationens $f'(z) = 0$ öfriga $m - 2m' + 2$ deriverade komplexa rotpunkter passerade K -kurvan mer än en gång, skulle denna kurva, under parameterens h växande, komma att hafva flere än $m - 2m' + 4$ komplexa multipel-punkter.

På samma sätt bevisas satsen, om flere än två af K -kurvans komplexa multipel-punkter hafva högre ordnings-nummer än två.

Tillämpningen af dessa satser är nu i korthet följande: Om man vid K -kurvans konstruktion ej afser en noggrann bestämning af komplexa multipel-punkters lägen och motsvarande värden på parametern, utan endast vill veta, huru många positiva fält kurvan, för ett visst värde H på parametern, innesluter, eller, med andra ord, huru många komplexa multipel-punkter den, för $h = H$, redan haft, så kan denna kunskap vinnas genom att undersöka, huru många och hvilka af equationens $f'(z) = 0$ deriverade komplexa rotpunkter ligga i positivt fält.

Som det alltså ofta blir för vårt ändamål af vigt att kunna åtminstone approximativt beräkna equationers komplexa rötter, hafva vi i en Not vid slutet framställt en sådan metod, användbar i de händelser, då dessa rötters antal ej öfverstiger fyra.

§ 29.

Ex. 1. Att finna den komplexa primär-kurvans till equationen

$$f(z) = z^5 - 15z^3 + 5z^2 + hz + k = 0$$

former för olika värden på parametern h .

Den andra deriverade equationen

$$2z^3 - 9z + 1 = 0$$

har tre reella rötter, nemligen

$$\sigma_1 = +2,063415; \quad \sigma_2 = +0,111418; \quad \sigma_3 = -2,174834;$$

följaktligen äro kurvans alla multipel-punkter reella.

Emedan man har

$$A(r) = -15r^2 \sin \frac{3\pi}{5} + 5r \sin \frac{2\pi}{5} + h \sin \frac{\pi}{5},$$

$$B(r) = -15r^2 \sin \frac{6\pi}{5} + 5r \sin \frac{4\pi}{5} + h \sin \frac{2\pi}{5},$$

så erhålles genom derivering

$$A'(r) = -30r \sin \frac{3\pi}{5} + 5 \sin \frac{2\pi}{5}, \quad B'(r) = -30r \sin \frac{6\pi}{5} + 5 \sin \frac{4\pi}{5};$$

följaktligen blifva tangerings-punkterna

$$\alpha = \gamma = \frac{1}{6}.$$

I den förra är $\left(\frac{dK}{dp}\right)$ positiv, i den sednare negativ.

Genom substitution erhålles

$$(\sigma_1) = h - 80,322; \quad (\sigma_2) = h + 0,5563; \quad (\sigma_3) = h - 122,73; \quad (\alpha) = h + 0,6741; \quad (\gamma) = h - 0,2575.$$

På grund och med ledning af nu funna värden kan den begärda konstruktionen sålunda verkställas.

Då h växer indefinit åt det negativa hållet, antager kurvan den nedre gränsformen, fig. 11.

Då h varierar i motsatt riktning, flytta sig kurvans intersektions-punkter med strålarne B och C , hvilka punkters radii vectores äro reella rötter till eqv. $B(r) = 0$, uppenbarligen allt närmare origo, och kurvan har, intilldess h blir $= -0,6741$, det utseende, fig. 12 visar.

För $h = -0,6741$ är $(\alpha) = 0$, således tangerar kurvan strålen A , och det på venstra sidan, eftersom $\left(\frac{dK}{dp}\right)$ här är positiv. Fig. 13.

För $h = -0,5563$ är deremot $(\sigma_2) = 0$. En multipel-punkt bildas således på x -axeln genom förening af de båda lateral-grenarne BC och $B'C'$, hvilka under parameterns fortsatta tillväxt öfvergå till tvenne transversal-grenar BB' och CC' . Fig. 14, 15.

Det fullständiga resultatet af den på samma sätt fortsatta diskussionen innehålles i följande

Tabell VII.

Vilkor.	Transversal-Grenar.	Lateral-Grenar.	Multipel-Punkter.		Intersektions-Punkter.	Antal Positiva Fält.	Figur.
			Plats.	Grenar.			
$\lim h = -\infty$	$AA' \dots DD'$	BC'				4	11
$0,6741 > h$	$AA' \dots DD'$	BC			b, c	4	12
$h = -0,6741$	$AA' \dots DD'$	BC			a, b, c	4	13
$0,5563 > h > -0,6741$	$AA' \dots DD'$	BC			a^2, b, c	4	-
$h = -0,5563$	$AA' \dots DD'$		σ_2	$BC, B'C'$	a^2, b, c	4-3	14
$0 > h > -0,5563$	AA', BB', CC', DD'				a^2, b, c	3	15
$h = 0$	AA', BB', CC', DD'				a, o, c	3	-
$+0,2575 > h > 0$	AA', BB', CC', DD'				a, c^2, d	3	-
$h = +0,2575$	AA', BB', CC', DD'				a, γ, d	3	-
$+80,322 > h > +0,2575$	AA', BB', CC', DD'				a, d	3	16
$h = +80,322$	CC', DD'		σ_1	AA', BB'	a, d	3-2	17
$+122,73 > h > +80,322$	CC', DD'	AB			a, d	2	18
$h = +122,73$		AB	σ_3	CC', DD'	a, d	2-1	19
$h > +122,73$		AB, CD			a, d	1	-
$\lim h = +\infty$		AB, CD				1	20

Beträffande denna tabell anmärka vi följande.

I tredje kolumnen utsättes blott den ena lateral-grenen af hvarje par.

I femte kolumnen upptagas för hvarje multipel-punkt de grenar, genom vilkas förening den uppkommit.

I sjette kolumnen utmärka de latinska bokstäfverna skärnings-, de grekiska tan-gerings-punkter. De förras exponenter angifva antalet skärnings-punkter på den ifråga-varande strålen.

För $h = 0$ passera två skärningspunkter genom origo, hvilket på behörigt ställe är angifvet.

§ 30.

Ex. 2. Att konstruera den komplexa primär-kurvan till eqvationen

$$f(z) = z^5 + 15z^3 + 5z^2 + hz + k = 0.$$

Den andra deriverade eqvationen

$$2z^3 + 9z + 1 = 0$$

har blott en reel rot, nemligen

$$\sigma = -0,110808;$$

följaktligen äro af multipel-punkterna blott en reel, och ett par komplexa.

För att finna dessa sednare bilda vi Σ -systemet, som blir

$$2x^3 + 9x + 1 = 2xy^2,$$

$$5(2x^2 + 3) = 2y^2,$$

och genom elimination af y^2 gifver

$$8x^3 + 6x - 1 = 0,$$

hvidan man erhåller

$$\Sigma = 0,161092 \pm 2,762201 i.$$

Ur eqvationerna

$$A(r) = 15r^2 \sin \frac{3\pi}{5} + 5r \sin \frac{2\pi}{5} + h \sin \frac{\pi}{5},$$

$$B(r) = 15r^2 \sin \frac{6\pi}{5} + 5r \sin \frac{4\pi}{5} + h \sin \frac{2\pi}{5},$$

erhålles genom derivering

$$A'(r) = 30r \sin \frac{3\pi}{5} + 5 \sin \frac{2\pi}{5}, \quad B'(r) = 30r \sin \frac{6\pi}{5} + 5 \sin \frac{4\pi}{5};$$

följaktligen blifva tangerings-punkterna

$$\beta = \delta = \frac{1}{6}.$$

I den förra är $\left(\frac{dK}{dp}\right)$ negativ, i den sednare positiv.

Genom substitution erhålles

$$(\sigma) = h - 0,55480; (\Sigma) = h - 55,431; (\beta) = h + 0,25751; (\delta) = h - 0,67417.$$

Tabell VIII.

Vilkor.	Transversal-Grenar.	Lateral-Grenar.	Multipel-Punkter.		Intersektions-Punkter.	Antal Positiva Fält.	Figur.
			Plats.	Grenar.			
$\lim h = -\infty$	AA', DD'	BC				4	11
$0,25751 > h$	AA', DD'	BC			a d	4	21
$h = -0,25751$	AA', DD'	BC			a, β d	4	—
$0 > h > -0,25751$	AA', DD'	BC			a, β^2 d	4	—
$h = 0$	AA', DD'	BC			b, c d	4	—
$+0,55480 > h > 0$	AA', DD'	BC			b, c, d^2	4	22
$h = +0,55480$		BC	σ	AA', DD'	b, c, d^2	4-3	23
$+0,67417 > h > +0,55480$		AD, BC			b, c, d^2	3	—
$h = +0,67417$		AD, BC			b, c, δ	3	—
$+55,431 > h > +0,67417$		AD, BC			b, c	3	24
$h = +55,431$			Σ	AD, BC	b, c	3-1	25
$h > +55,431$		AB, CD			b, c	1	26
$\lim h = +\infty$		AB, CD				1	20

§ 31.

Ex. 3. $f(z) = z^6 + z^4 - 2z^3 + 3z^2 + hz + k = 0.$

Den andra deriverade eqvationen

$$5z^4 + 2z^2 - 2z + 1 = 0$$

har ingen reel rot. Således äro alla multipel-punkterna komplexa. För att finna dem bilda vi Σ -systemet, hvars resultant i x blir

$$320x^4 + 48x^4 + 32x^3 - 32x^2 - 1 = 0,$$

och ur hvilket erhålles

$$\Sigma_1 = 0,448576 \pm 0,545118 \, i,$$

$$\Sigma_2 = -0,584094 \pm 1,089626 \, i.$$

På grund af likheterna

$$A(r) = r^3 \sin \frac{\pi}{3} - 2r^2 + 3r \sin \frac{\pi}{3} + h \sin \frac{\pi}{6},$$

$$B(r) = -r^3 \sin \frac{\pi}{3} + 3r \sin \frac{\pi}{3} + h \sin \frac{\pi}{3},$$

$$C(r) = 2r^2 + h$$

erhålles vidare

$$\beta = 1; \quad \gamma = 0; \quad \delta = 1;$$

samt genom substitution

$$(\Sigma_1) = h + 1,7165; \quad (\Sigma_2) = h - 1,8163;$$

$$(\beta) = h + 2; \quad (\gamma) = h; \quad (\delta) = h - 2;$$

hvarjemte man slutligen finner, att $\left(\frac{dK}{dp}\right)$ är positiv i β , negativ i δ .

Tabell IX.

Vilkor.	Transversal-Grenar.	Lateral-Grenar.	Multipel-Punkter.		Intersektions-Punkter.	Antal Positiva Fält.	Figur.
			Plats.	Grenar.			
$\lim h = -\infty$	AA'	BC, DE				5	32
$-2 > h$	AA'	BC, DE			a, c, d	5	33
$h = -2$	AA'	BC, DE			a, β, c, d	5	—
$-1,7165 > h > -2$	AA'	BC, DE			a, b^2, c, d	5	34
$h = -1,7165$		DE	Σ_1	$AA' \left\{ \begin{smallmatrix} BC \\ B'C' \end{smallmatrix} \right\}$	a, b^2, c, d	5—3	35
$0 > h > -1,7165$	CC'	AB, DE			a, b^2, c, d	3	36
$h = 0$	CC'	AB, DE			$b, 0, d$	3	37
$+1,8163 > h > 0$	CC'	AB, DE			b, d^2, e	3	—
$h = +1,8163$		AB	Σ_2	$CC' \left\{ \begin{smallmatrix} DE \\ D'E' \end{smallmatrix} \right\}$	b, d^2, e	3—1	38
$+2 > h > +1,8163$	EE'	AB, CD			b, d^2, e	1	—
$h = +2$	EE'	AB, CD			b, δ, e	1	39
$h > +2$	EE'	AB, CD			b, e	1	40
$\lim h = +\infty$	EE'	AB, CD				1	41

§ 32.

Ex. 4. $f(z) = 15z^8 - 364z^6 + 420z^5 + 1750z^4 - 3640z^3 + 2520z^2 + hz + k = 0.$

Den andra deriverade equationen har sex reella rötter, nemligen

$$\sigma_1 = +2,61803; \quad \sigma_2 = +1,64574; \quad \sigma_3 = +0,61803;$$

$$\sigma_4 = +0,38196; \quad \sigma_5 = -1,61803; \quad \sigma_6 = -3,64574;$$

följaktligen äro kurvans alla multipel-punkter reella.

På grund af likheterna

$$A(r) = -364r^5 \sin \frac{\pi}{4} + 420r^4 \sin \frac{3\pi}{8} + 1750r^3 - 3640r^2 \sin \frac{3\pi}{8} + 2520r \sin \frac{\pi}{4} + h \sin \frac{\pi}{8},$$

$$B(r) = 364r^5 - 420r^4 \sin \frac{\pi}{4} - 3640r^2 \sin \frac{\pi}{4} + 2520r + h \sin \frac{\pi}{4},$$

$$C(r) = -364r^5 \sin \frac{\pi}{4} - 420r^4 \sin \frac{\pi}{8} - 1750r^3 + 3640r^2 \sin \frac{\pi}{8} + 2520r \sin \frac{\pi}{4} + h \sin \frac{3\pi}{8},$$

$$D(r) = 420r^4 + 3640r^2 + h$$

erhålles vidare

$$\alpha_1 = 0,39902; \quad \alpha_2 = 0,78530; \quad \alpha_3 = 2,11293; \quad \beta_1 = 0,48277;$$

$$\beta_2 = 1,49975; \quad \gamma = 0,77770; \quad \delta = 0; \quad \varepsilon = 0,50003;$$

$$\eta = 2,09120;$$

samt genom substitution

$$(\sigma_1) = h - 4841,1; \quad (\sigma_2) = h + 2882,1; \quad (\sigma_3) = h + 709,88;$$

$$(\sigma_4) = h + 749,07; \quad (\sigma_5) = h - 31266; \quad (\sigma_6) = h + 247645;$$

$$(\alpha_1) = h + 768,24; \quad (\alpha_2) = h + 636,67; \quad (\alpha_3) = h + 5628,1;$$

$$(\beta_1) = h + 862,82; \quad (\beta_2) = h - 1061,46; \quad (\gamma) = h + 1378,01;$$

$$(\delta) = h; \quad (\varepsilon) = h - 352,78; \quad (\eta) = h - 43698;$$

hvarjemte man slutligen finner, att $\left(\frac{dK}{dp}\right)$ är

positiv i $\alpha_1, \alpha_3, \beta_1, \gamma, \eta$;

negativ i $\alpha_2, \beta_2, \varepsilon$.

§ 33.

Ex. 5. $f(z) = z^8 - z^5 + hz + k = 0$.

Man har här

$$f''(z) = 56z^6 - 20z^3;$$

följaktligen satisfieras den andra deriverade eqvationen af

$$\sigma_1 = 0,70949; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 0,$$

samt af tvenne komplexa rötter. K -kurvan har således ett par komplexa multipelpunkter, för beräkningen af hvilkas koordinater, äfvensom af det motsvarande värdet på kurvans parameter, låt vara h_1 , man efter regeln har att bilda och upplösa en eqvation af 15:de graden. Men derest man, såsom nu är händelsen, ej afser ett noggrannt bestämmande af dessa quantiteter, utan endast kurvans konstruktion, kan man, såsom härneda skall visas, förmedelst den i § 28 beskrifna metoden, bespara sig denna vidlyftiga räkning.

Man finner vidare

$$\begin{aligned} A(r) &= -r^4 \sin \frac{3\pi}{8} + h \sin \frac{\pi}{8}; & B(r) &= r^4 \sin \frac{\pi}{4} + h \sin \frac{\pi}{4}; \\ C(r) &= r^4 \sin \frac{\pi}{8} + h \sin \frac{3\pi}{8}; & D(r) &= -r^4 + h; \end{aligned}$$

samt följaktligen

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0.$$

Substitution gifver

$$(\sigma_1) = h - 0,54297; \quad (\sigma_2) = (\alpha) = h.$$

För $h = 0$ har eqvationen $f'(z) = 0$ blott ett par komplexa rötter, nemligen

$$\sqrt[3]{\frac{5}{8}} \left(\cos \frac{2\pi}{3} \pm i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

Substitution i funktionen K visar, att de äro belägna i positivt fält. Följaktligen måste h_1 vara < 0 .

Återstår att bestämma punktens Σ grenar. En blick på fig. 61 visar, att de måste vara DE och FG , ty för $h < 0$ kunna inga andra råkas. Uppenbarligen måste ock Σ vara belägen i intervallet EF .

Tabell XI.

Villkor.	Transversal-Grenar.	Lateral-Grenar.	Multipel-Punkter.		Intersektions-Punkter.	Antal Positiva Fält.	Figur.
			Plats.	Grenar.			
$\lim h = \infty$	AA'	BC, DE, FG				7	42
$h_1 > h$	AA'	BC, DE, FG			b, c, e, f	7	61
$h = h_1$	AA'	BC	Σ	DE, FG	b, c, e, f	7-5	62
$0 > h > h_1$	AA'	BC, DG, EF			b, c, e, f	5	63
$h = 0$	AA'	EF	σ_2	$\{BC, DG, B'C', D'G'\}$	0	5-2	64
$+ 0,54297 > h > 0$	AA', BB', GG'	CD, EF			a, d, g	2	65
$h = + 0,54297$	GG'	CD, EF	σ_1	AA', BB'	a, d, g	2-1	66
$h > + 0,54297$	GG'	AB, CD, EF			a, d, g	1	67
$\lim h = + \infty$	GG'	AB, CD, EF				1	60

§ 34.

Ex. 6. $f(z) = z^8 - z^4 + hz + k = 0$.

Man har

$$f'''(z) = 56z^6 - 12z^3;$$

följaktligen satisfieras eqvationen $f''(z) = 0$ af

$$\sigma_1 = +0,68037; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0; \quad \sigma_4 = -0,68037;$$

samt ett par komplexa rötter. För bestämmandet af de båda komplexa multipel-punkterna gå vi till väga på samma sätt som i föregående exempel.

Vidare erhålles

$$A(r) = -r^3 + h \sin \frac{\pi}{8}; \quad B(r) = h \sin \frac{\pi}{4};$$

$$C(r) = r^3 + h \sin \frac{3\pi}{8}; \quad D(r) = h;$$

samt följaktligen

$$\alpha = \gamma = 0;$$

hvarjemte inses, att för $h = 0$ utgöra sjelfva strålarne B , D och F beståndsdelar af kurvan.

Substitution gifver nu

$$(\sigma_1) = h - 0,71989; \quad (\sigma_2) = 0; \quad (\sigma_4) = h + 0,71989; \quad (\alpha) = (\gamma) = h.$$

För $h = 0$ har eqv. $f'(z) = 0$ blott ett par komplexa rötter, nemligen

$$\pm i \sqrt[4]{\frac{1}{2}}.$$

Dessa ligga på y -axeln, således på sjelfva kurvan, som följaktligen har för $h = 0$ ett par komplexa dubbelpunkter.

Konstruktionen utfaller följaktligen så, som följande tabell med tillhörande figurer utvisar. Vi hafva här tillagt tvenne figurer, nemligen för $h = \pm \delta$ (en mycket liten kvantitet), för att visa öfvergången från de krokiga linierna till de räta B , D och F .

Tabell XII.

Vilkor.	Transversal-Grenar.	Lateral-Grenar.	Multipel-Punkter.		Intersektions-Punkter.	Antal Positiva Fält.	Figur.
			Plats.	Grenar.			
$\lim h = -\infty$	AA'	BC, DE, FG				7	42
$-0,71989 > h$	AA'	BC, DE, FG			$c \quad g$	7	68
$h = -0,71989$	AA'	BC, DE	σ_4	$FG, F'G'$	$c \quad g$	7-6	69
$0 > h > -0,71989$	AA', FF, GG'	BC, DE			$c \quad g$	6	70
$h = -\delta$	AA', FF, GG'	BC, DE			$c \quad g$	6	71
$h = 0$	$AA' \quad GG'$		$\left\{ \begin{smallmatrix} \sigma_2 \\ \Sigma \end{smallmatrix} \right.$	$\left. \begin{smallmatrix} BC, B'C, FF' \\ BC, DE \end{smallmatrix} \right\}$	0	6-2	72
$h = +\delta$	AA', BB', GG'	CD, EF			$a \quad e$	2	73
$+0,71989 > h > 0$	AA', BB', GG'	CD, EF			$a \quad e$	2	74
$h = +0,71989$	GG'	CD, EF	σ_1	AA', BB'	$a \quad e$	2-1	75
$h > +0,71989$	GG'	AB, CD, EF			$a \quad e$	1	76
$\lim h = +\infty$	GG'	AB, CD, EF				1	60

Tillämpning på Generella Eqvationer.

§ 35.

Eqvationen af 3:dje graden. Vi skriva den under formen

$$f(z) = z^3 - 3hz + k = 0.$$

Den andra deriverade eqvationen har en reel rot, nemligen

$$\sigma = 0.$$

Eqvationerna

$$A(r) - B(r) = -3h \sin \frac{\pi}{3}$$

gifva inga tangeringspunkter. Emedan

$$(\sigma) = -3h,$$

blir schemat för K -kurvan, som naturligtvis är en hyperbel, helt enkelt följande

Tabell XIII.

Vilkor.	Transversal- Grenar.	Lateral- Grenar.	Multipel-punkt.		Antal Positiva Fält.
			Plats.	Grenar.	
I. $h > 0$	AA', BB'				2
II. $h = 0$			σ	AA', BB'	2 = 1
III. $h < 0$		AB			1

I. Den deriverade eqvationen $f'(z) = 0$ eller

$$z^2 - h = 0$$

har de reella rötterna

$$\left. \begin{matrix} \varrho_1 \\ \varrho_2 \end{matrix} \right\} \pm \sqrt{h}$$

Substitution gifver

$$\left. \begin{matrix} (\varrho_1) \\ (\varrho_2) \end{matrix} \right\} = k \mp 2h \sqrt{h}.$$

II. $f''(z) = 0$ gifver

$$\varrho_1 - \varrho_2 = 0;$$

och genom substitution erhålles

$$(\varrho_1) - (\varrho_2) = k.$$

III. $f'(z) = 0$ har ingen reel rot.

Rotpunkternas platser uppgifvas i följande

Tabell XIV.

Vilkor.	Reella Rötters Antal.	Reella Rötters Platser.	Egna Kompl. Rötter.		Deriver. Kompl. Rötter.	
			Grenar.	Intervaller.	Grenar.	Intervaller.
I. $h > 0$.						
$-2h \sqrt{h} > k$	1	 ϱ_1, r_1	BB'	BX'	—	—
$k = -2h \sqrt{h}$	3 (2)	$r_3 = \varrho_2 = r_2, \varrho_1, r_1$	—	—	—	—
$+2h \sqrt{h} > k > -2h \sqrt{h}$	3	$r_3, \varrho_2, r_2, \varrho_1, r_1$	—	—	—	—
$k = +2h \sqrt{h}$	3 (2)	$r_3, \varrho_2, r_2 = \varrho_1 = r_1$	—	—	—	—
$k = +2h \sqrt{h}$	1	r_3, ϱ_2	AA'	XA	—	—
II. $h = 0$.						
$0 > k$	1	 ϱ_1, r_1	B	B	—	—
$k = 0$	3 (3)	$r_3 = \varrho_2 = r_2 = \varrho_1 = r_1$	—	—	—	—
$k > 0$	1	r_3, ϱ_2	A	A	—	—
III. $h < 0$.						
	1				AB	AB

§ 36.

Eqvationen af 4:de graden.

$$f(z) = z^4 - 6gz^2 + hz + k = 0.$$

Här är

$$f''(z) = 12(z^2 - g);$$

$$A(r) = -6gr + h \sin \frac{\pi}{4}, \quad B(r) = h.$$

Vi särskilja tre fall.

I. $g > 0$. Då är

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \pm \sqrt{g}; \quad \left. \begin{matrix} (\sigma_1) \\ (\sigma_2) \end{matrix} \right\} = h \mp 8g \sqrt{g}.$$

II. $g = 0$.

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0; \quad (\sigma_1) = (\sigma_2) = h.$$

III. $g < 0$.

K -kurvan har då tvenne komplexa multipel-punkter, nemligen

$$\Sigma = \pm i \sqrt{-3g};$$

hvarjemte man erhåller

$$(\Sigma) = h.$$

Tabell XV.

Vilkor.	Transversal-Grenar.	Lateral-Grenar.	Multipel-punkter.		Intersekt-punkter.	Antal Positiva Fält.	Figur.
			Plats.	Grenar.			
I. $g > 0$.							
$\lim h = -\infty$	AA'	BC				3	1
$-8g\sqrt{g} > h$	AA'	BC			c	3	2
$h = -8g\sqrt{g}$	AA'		σ_2	$BC, B'C'$	c	3—2	3
$0 > h > -8g\sqrt{g}$	AA', BB', CC'				c	2	4
$h = 0$	AA', BB', CC'				0	2	5
$+8g\sqrt{g} > h > 0$	AA', BB', CC'				a	2	—
$h = +8g\sqrt{g}$	CC'		σ_1	AA', BB'	a	2—1	6
$h > +8g\sqrt{g}$	CC'	AB			a	1	—
$\lim h = +\infty$	CC'	AB				1	7
II. $g = 0$.							
$0 > h$	AA'	BC				3	1
$h = 0$			0	$AA' \begin{Bmatrix} BC \\ B'C' \end{Bmatrix}$		3—1	—
$h > 0$	CC'	AB				1	7
III. $g < 0$.							
$\lim h = \infty$	AA'	BC				3	1
$0 > h$	AA'	BC			a	3	8
$h = 0$			Σ	$AA' \begin{Bmatrix} BC \\ B'C' \end{Bmatrix}$	0	3—1	9
$h > 0$	CC'	AB			c	1	10
$\lim h = +\infty$	CC'	AB				1	7

Bestämmandet af rotpunkternas platser möter numera ingen annan svårighet än räkningens vidlyftighet. Vi anse oss alltså kunna förbigå detsamma.

§ 37.

Equationen af 5:te graden. Emedan användandet af vår metod på densamma ej erfordrar upplösning af eqvationer af högre grad än fjerde, skulle man kunna välja hvilken form som helst på $f(z)$. Emedlertid skulle räkningarne blifva hardt nära omöjliga att utföra på grund af sin vidlyftighet, derest man icke först bortskaffade en eller annan term ur den till undersökning framställda eqvationen.

Den bekanta BRING-JERRARD'ska metoden, förmedelst hvilken man ur hvilken eqvation som helst kan bortskaffa den andra, tredje och fjerde termen, kan ej utan modifikation användas för vårt ändamål, emedan koëfficienterna i den nya eqvationen, hvilkas värden, såsom bekant är, bero af trenne eqvationer, nemligen af första, andra och tredje graden, respektive, kunna blifva komplexa. Men detta inträffar ej, om man nöjer sig med att bortskaffa endast den andra och fjerde termen, ty, eftersom koëfficienterna i den reducerade eqvationen då äro reella funktioner af rötterna till en första och en tredje-grads-eqvation, kan man alltid välja sådana solutioner, att dessa koëfficienter blifva reella.

Den generella eqvationen af 5:te graden kan således alltid reduceras till

$$3z^5 - 10gz^3 + 15hz + k = 0,$$

under hvilken form vi nu skola undersöka densamma.

Då är

$$A(r) = -10gr^2 \sin \frac{2\pi}{5} + 15h \sin \frac{\pi}{5}; \quad B(r) = 10gr^2 \sin \frac{\pi}{5} + 15h \sin \frac{2\pi}{5};$$

$$\alpha = \beta = 0; \quad (\alpha) = (\beta) = 15h.$$

Vi särskilja tre fall.

I. $g > 0$. Då är

$$\sigma_1 = \sqrt[5]{g}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\sqrt[5]{g};$$

$$(\sigma_1) = (\sigma_3) = 15(h - g^2), \quad (\sigma_2) = 15h.$$

II. $g = 0$.

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0; \quad (\sigma_1) = (\sigma_2) = (\sigma_3) = 15h.$$

III. $g < 0$.

$$\sigma = 0; \quad \Sigma = \pm i \sqrt{-\frac{5g}{3}};$$

$$(\sigma) = 15h; \quad (\Sigma) = 15\left(h - \frac{5g^2}{9}\right).$$

Tabell XVI.

Vilkor.	Transversal-Grenar.	Lateral-Grenar.	Multipel-punkter.		Intersekt-punkter.	Antal Positiva Fält.	Figur.
			Plats.	Grenar.			
I. $g > 0$.							
lim $h = -\infty$	$AA' \dots DD'$	BC				4	11
1. $0 > h$	$AA' \dots DD'$	BC			b, c	4	12
2. $h = 0$	$AA' \dots DD'$		σ_2	$BC, B'C'$	0	4—3	27
3. $g^2 > h > 0$	AA', BB', CC', DD'				a, d	3	28
4. $h = g^2$			$\{\sigma_1, \sigma_3\}$	$\{AA', BB', CC', DD'\}$	a, d	3—1	29
5. $h > g^2$		AB, CD			a, d	1	—
lim $h = +\infty$		AB, CD				1	20
II. $g = 0$.							
1. $0 > h$	$AA' \dots DD'$	BC				4	11
2. $h = 0$			0	$\{AA', DD', BC, B'C'\}$	0	4—1	—
3. $h > 0$		AB, CD				1	20
III. $g < 0$.							
lim $h = -\infty$	$AA' \dots DD'$	BC				4	11
1. $0 > h$	$AA' \dots DD'$	BC			a, d	4	30
2. $h = 0$		BC	σ	AA', DD'	0	4—3	31
3. $\frac{5g^2}{9} > h > 0$		AD, BC			b, c	3	—
4. $h = \frac{5g^2}{9}$			Σ	AD, BC	b, c	3—1	—
5. $h > \frac{5g^2}{9}$		AB, CD			b, c	1	26
lim $h = +\infty$		AB, CD				1	20

Vi öfvergå nu till bestämmandet af rotpunkternas platser, hvarvid vi dock, för undvikande af allt för stor vidlyftighet, inskränka oss, i afseende på de *deriverade* komplexa rotpunkterna, till att angifva endast grenar, ej intervaller; en inskränkning, hvilken vi med så mycket större fog här kunna tillåta oss, som man med kännedom om de grenar, på hvilka ifrågavarande rotpunkter äro belägna, kan utan svårighet »separera» dem.

För korthets skull använda vi äfven i det följande beteckningarne

$$(1), (2), (3), (4)$$

i stället för

$$(\varrho_1), (\varrho_2), (\varrho_3), (\varrho_4)$$

respektive.

I. $g > 0$.

1. $h < 0$.

$$\left. \begin{matrix} \varrho_1 \\ \varrho_2 \end{matrix} \right\} = \pm \sqrt{g + \sqrt{g^2 - h}}; \quad \left. \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \right\} = k \pm 4(3h - g^2 - g\sqrt{g^2 - h}) \sqrt{g + \sqrt{g^2 - h}}.$$

2. $h = 0$.

$$\left. \begin{matrix} \varrho_1 \\ \varrho_4 \end{matrix} \right\} = \pm \sqrt{2g}; \quad \varrho_2 = \varrho_3 = 0.$$

$$\left. \begin{matrix} (1) \\ (4) \end{matrix} \right\} = k \mp 8g^2 \sqrt{2g}; \quad (2) = (3) = k.$$

3. $g^2 > h > 0$.

$$\left. \begin{matrix} \varrho_1 \\ \varrho_4 \end{matrix} \right\} = \pm \sqrt{g + \sqrt{g^2 - h}}; \quad \left. \begin{matrix} \varrho_2 \\ \varrho_3 \end{matrix} \right\} = \pm \sqrt{g - \sqrt{g^2 - h}}.$$

$$a = d = \sqrt[3]{\frac{3h(\sqrt{5}-1)}{4g}}.$$

$$\left. \begin{matrix} (1) \\ (4) \end{matrix} \right\} = k \pm 4(3h - g^2 - g\sqrt{g^2 - h}) \sqrt{g + \sqrt{g^2 - h}};$$

$$\left. \begin{matrix} (2) \\ (3) \end{matrix} \right\} = k \pm 4(3h - g^2 + g\sqrt{g^2 - h}) \sqrt{g - \sqrt{g^2 - h}};$$

$$\left. \begin{matrix} (a) \\ (d) \end{matrix} \right\} = k \pm \frac{3h}{16g^2} [40g^2 - 9h(3 - \sqrt{5})] \sqrt[3]{\frac{3h(\sqrt{5}-1)}{g}}.$$

Beträffande dessa substitutions-resultaters relativa storlek må följande märkas.

Eftersom (1) och (3) äro minima, (2) och (4) maxima, måste man alltid hafva

$$(1) < (2) > (3) < (4).$$

Beteckna vi nu ett sådant olikhets-förhållande som till exempel

$$(1) < (2) < (3) < (4)$$

helt enkelt med

$$(1), (2), (3), (4),$$

så är uppenbart, att af de 24 permutationer, som kunna åstadkommas af ifrågavarande fyra substitutions-resultater, äro på sin höjd *fem* möjliga, nemligen

$$\begin{aligned}
 &(1), (3), (2), (4), \\
 &(1), (3), (4), (2), \\
 &(3), (1), (2), (4), \\
 &(3), (1), (4), (2), \\
 &(3), (4), (1), (2).
 \end{aligned}$$

Men emedan man också har

$$(1) + (4) = (2) + (3),$$

samt följaktligen

$$(1) \geq (3), \text{ på samma gång som } (2) \geq (4),$$

så bortfalla äfven den andra och den tredje af dessa fem permutationer, och endast tre återstå, till hvilka vi lägga tvenne fall af likhet:

$$\begin{aligned}
 &(1), (3), (2), (4), \\
 &(1) = (3), (2) = (4), \\
 &(3), (1), (4), (2), \\
 &(3), (1) = (4), (2), \\
 &(3), (4), (1), (2).
 \end{aligned}$$

Vi anmärka i förbigående, att dessa fem fall motsvara respektive de fem positionerna:

$$\begin{aligned}
 &4g^2 > 9h > 0, \\
 &9h = 4g^2, \\
 &5g^2 > 9h > 4g^2, \\
 &9h = 5g^2, \\
 &9g^2 > 9h > 5g^2,
 \end{aligned}$$

såsom man lätt kan verifiera.

Emedan man också alltid har

$$(a) > (2), (d) < (3),$$

äfvensom

$$(a) + (d) = (1) + (4),$$

och följaktligen

$$(a) \geq (4), \text{ på samma gång som } (1) \geq (d),$$

så äro uppenbarligen endast följande sju positioner möjliga i afseende på de ifrågavarande sex substitutions-resultaternas relativa storlek:

1)	(1), (d), (3), (2), (a), (4),
2)	(1) = (d), (3), (2), (a) = (4),
3)	(d), (1), (3), (2), (4), (a),
4)	(d), (1) = (3), (2) = (4), (a),
5)	(d), (3), (1), (4), (2), (a),
6)	(d), (3), (1) = (4), (2), (a),
7)	(d), (3), (4), (1), (2), (a).

För att underlätta öfversigten af hithörande tabell hafva vi i en särskild kolumn upptagit den eller de positioners ordningsnummer, som motsvara hvarje särskildt fall.

$$4. \quad h = g^2.$$

$$\left. \begin{array}{l} \varrho_1 = \varrho_2 \\ \varrho_3 = \varrho_4 \end{array} \right\} = \pm \sqrt{g}; \quad a = d = \sqrt{\frac{3g(\sqrt{5}-1)}{4}}.$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) = (2) \\ (3) = (4) \end{array} \right\} = k \pm 8g^2 \sqrt{g}; \quad \left. \begin{array}{l} (a) \\ (d) \end{array} \right\} = k \pm \frac{3g^2}{16} (13 + 9\sqrt{5}) \sqrt{3g(\sqrt{5}-1)}.$$

$$5. \quad h > g^2.$$

En rotpunkt på hvar och en af de fyra lateral-grenarne.

$$\text{II. } g = 0.$$

$$1. \quad h < 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} \varrho_1 \\ \varrho_2 \end{array} \right\} = \pm \sqrt[4]{-h}; \quad \left. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \right\} = k \pm 12h \sqrt[4]{-h}.$$

Tabellen densamma som för I. 1.

$$2. \quad h = 0.$$

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_4 = 0.$$

$$(1) = (2) = (3) = (4) = k.$$

$$3. \quad h > 0.$$

En rotpunkt på hvar och en af de fyra lateral-grenarne.

$$\text{III. } g < 0.$$

$$1. \quad h < 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} \varrho_1 \\ \varrho_2 \end{array} \right\} = \pm \sqrt{g + \sqrt{g^2 - h}}; \quad a = d = \sqrt{\frac{3h(\sqrt{5}-1)}{4g}}.$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \right\} = k \pm 4(3h - g^2 - g\sqrt{g^2 - h})\sqrt{g + \sqrt{g^2 - h}};$$

$$\left. \begin{array}{l} (a) \\ (d) \end{array} \right\} = k \pm \frac{3h}{16g^2} [40g^2 - 9h(3 - \sqrt{5})] \sqrt{\frac{3h(\sqrt{5}-1)}{g}}.$$

$$2. \quad h = 0.$$

$$\varrho_1 = \varrho_2 = 0; \quad (1) = (2) = k.$$

$$3. \quad \frac{5g^2}{9} > h > 0.$$

En rotpunkt på hvar och en af de fyra lateral-grenarne.

$$4. \quad h = \frac{5g^2}{9}.$$

$$S = \pm i \sqrt{-\frac{5g}{3}}; \quad (S) = k.$$

$$5. \quad h > \frac{5g^2}{9}.$$

En rotpunkt på hvar och en af de fyra lateral-grenarne.

Tabell XVII.

Positions Ordnings- Nummer.	Vilkor.	Reella Rötters Antal.	Reella Rötters Platsar.	Egna Komplexa Rötter.		Deriverade Komplexa Rötters Grenar.
				Grenar.	Intervaller.	
I. $g > 0$.						
1. $h < 0$.						
—	$(1) < 0, (2) > 0$	3	r_3, q_2, r_2, q_1, r_1	—	—	BC
—	$(1) = 0, (2) > 0$	3 (2)	$r_3, q_2, r_2 = q_1 = r_1$	—	—	BC
—	$(1) < 0, (2) = 0$	3 (2)	$r_3 = q_2 = r_2, q_1, r_1$	—	—	BC
—	$(1) (2) > 0$	1	r_3, q_2	AA'	XA	BC
—	$(1) (2) < 0$	1	r_3, q_2	DD'	DX'	BC
2. $h = 0$.						
—	$(1) < 0, (2) = 0, (4) > 0$	5 (3)	$r_6, q_4, r_4 = q_3 = r_3 = q_2 = r_2, q_1, r_1$	—	—	—
—	$(1) (2) < 0, (4) > 0$	3	r_6, q_4, r_4, q_3	BB'	AB	—
—	$(1) < 0, (2) (4) > 0$	3	r_6, q_4	CC'	CD	—
—	$(1) (2) < 0, (4) = 0$	3 (2)	$r_6 = q_4 = r_4$	BB'	AB	—
—	$(1) = 0, (2) (4) > 0$	3 (2)	r_6, q_4	CC'	CD	—
—	$(1) (2) (4) < 0$	1	r_6, q_4	$BB' DD'$	$AB DX'$	—
—	$(1) (2) (4) > 0$	1	r_6, q_4	AA'	$XA CD$	—
3. $g^2 > h > 0$.						
1-5	$(1) (d) (3) < 0, (2) (a) (4) > 0$	5	$r_6, q_4, r_4, q_3, r_3, q_2, r_2, q_1, r_1$	—	—	—
5	$(1) = 0, (d) (3) < 0, (4) (2) (a) > 0$	5 (2)	$r_6, q_4, r_4, q_3, r_3, q_2 = q_1 = r_1$	—	—	—
1-3	$(2) = 0, (1) (d) (3) < 0, (a) (4) > 0$	5 (2)	$r_6, q_4, r_4, q_3, r_3 = q_2 = r_2, q_1, r_1$	—	—	—
1 3	$(3) = 0, (1) (d) < 0, (2) (a) (4) > 0$	5 (2)	$r_6, q_4, r_4 = q_3 = r_3, q_2, r_2, q_1, r_1$	—	—	—
5	$(4) = 0, (d) (3) (1) < 0, (2) (a) > 0$	5 (2)	$r_6 = q_4 = r_4, q_3, r_3, q_2, r_2, q_1, r_1$	—	—	—
4	$(1) = (3) = 0, (d) < 0, (2) (4) (a) > 0$	5 (2, 2)	$r_6, q_4, r_4 = q_3 = r_3, q_2, r_2 = q_1 = r_1$	—	—	—
6	$(1) = (4) = 0, (d) (3) < 0, (2) (a) > 0$	5 (2, 2)	$r_6 = q_4 = r_4, q_3, r_3, q_2 = q_1 = r_1$	—	—	—
4	$(2) = (4) = 0, (d) (1) (3) < 0, (a) > 0$	5 (2, 2)	$r_6 = q_4 = r_4, q_3, r_3 = q_2 = r_2, q_1, r_1$	—	—	—
5-7	$(d) (3) < 0, (1) (4) (2) (a) > 0$	3	$r_6, q_4, r_4, q_3, r_3, q_2$	AA'	XA	—
1-3	$(1) (d) (3) (2) < 0, (a) (4) > 0$	3	r_6, q_4, r_4, q_3	BB'	XA	—
1	$(1) (d) (3) (2) < 0, (a) = 0, (4) > 0$	3	r_6, q_4, r_4, q_3	BB'	a	—
1	$(1) (d) (3) (2) (a) < 0, (4) > 0$	3	r_6, q_4, r_4, q_3	BB'	AB	—
1-3	$(1) (d) < 0, (3) (2) (a) (4) > 0$	3	r_6, q_4	CC'	DX'	—

Fortsättning af Tabell XVII.

Positions Ordnings- Nummer.	Vilkor.	Reella Rötters Antal.	Reella Rötters Platser.	Egna Komplexa Rötter.		Deriverade Komplexa Rötters Grenar.
				Grenar.	Intervaller.	
1	$(1) < 0, (d) = 0, (3)(2)(a)(4) > 0$	3	r_5, q_4	CC'	d	—
1	$(1) < 0, (d)(3)(2)(a)(4) > 0$	3	r_5, q_4	CC'	CD	—
5-7	$(d)(3)(1)(4) < 0, (2)(a) > 0$	3	r_5, q_4	DD'	DX'	—
5-7	$(d) < 0, (3) = 0, 1(4)(2)(a) > 0$	3(2)	$r_5, q_4, r_4 = q_3 = r_3$	AA'	XA	—
7	$(d)(3) < 0, (4) = 0, 1(2)(a) > 0$	3(2)	$r_5, q_4, r_4 = q_3 = r_3$	AA'	XA	—
3	$(d)(1)(3)(2) < 0, (4) = 0, (a) > 0$	3(2)	$r_5, q_4, r_4 = q_3 = r_3$	BB'	XA	—
2	$(d)(1)(3)(2) < 0, (4) = 0, (a) = 0$	3(2)	$r_5, q_4, r_4 = q_3 = r_3$	BB'	a	—
1	$(1)(d)(3)(2)(a) < 0, (4) = 0$	3(2)	$r_5, q_4, r_4 = q_3 = r_3$	BB'	AB	—
3	$(d) < 0, (1) = 0, (3)(2)(4)(a) > 0$	3(2)	r_5, q_4	CC'	DX'	—
2	$(d) = (1) = 0, (3)(2)(4)(a) > 0$	3(2)	r_5, q_4	CC'	d	—
1	$(1) = 0, (d)(3)(2)(a) > 0$	3(2)	r_5, q_4	CC'	CD	—
5-7	$(d)(3)(1)(4) < 0, (2) = 0, (a) > 0$	3(2)	r_5, q_4	DD'	DX'	—
7	$(d)(3)(4) < 0, (1) = 0, (a) > 0$	3(2)	r_5, q_4	DD'	DX'	—
3-7	$(d)(1)(3)(2)(4) < 0, (a) > 0$	1	r_5, q_4	BB'	XA	—
3-7	$(d)(1)(3)(2)(4) < 0, (a) = 0$	1	r_5, q_4	BB'	a	—
1-7	$(d)(1)(3)(2)(4)(a) < 0$	1	r_5, q_4	BB'	AB	—
3-7	$(d) < 0, (1)(3)(2)(4)(a) > 0$	1	r_5, q_4	AA'	XA	—
3-7	$(d) = 0, (1)(3)(2)(4)(a) > 0$	1	r_5, q_4	AA'	XA	—
1-7	$(d)(1)(3)(2)(4)(a) > 0$	1	r_5, q_4	AA'	d	—
7	$(d)(3)(4) < 0, (1)(2)(a) > 0$	1	r_5, q_4	AA'	CD	—
3-7	$(d)(1)(3)(2)(4) < 0, (a) > 0$	1	r_5, q_4	DD'	DX'	—
3-7	$(d)(1)(3)(2)(4) < 0, (a) = 0$	1	r_5, q_4	DD'	DX'	—
1-7	$(d)(1)(3)(2)(4)(a) < 0$	1	r_5, q_4	DD'	DX'	—
3-7	$(d) < 0, (1)(3)(2)(4)(a) > 0$	1	r_5, q_4	AA'	XA	—
3-7	$(d) = 0, (1)(3)(2)(4)(a) > 0$	1	r_5, q_4	AA'	XA	—
1-7	$(d)(1)(3)(2)(4)(a) > 0$	1	r_5, q_4	AA'	d	—
7	$(d)(3)(4) < 0, (1)(2)(a) > 0$	1	r_5, q_4	AA'	CD	—
3-7	$(d)(1)(3)(2)(4) < 0, (a) > 0$	1	r_5, q_4	DD'	DX'	—
3-7	$(d)(1)(3)(2)(4) < 0, (a) = 0$	1	r_5, q_4	DD'	DX'	—
1-7	$(d)(1)(3)(2)(4)(a) < 0$	1	r_5, q_4	DD'	DX'	—
3-7	$(d) < 0, (1)(3)(2)(4)(a) > 0$	1	r_5, q_4	AA'	XA	—
3-7	$(d) = 0, (1)(3)(2)(4)(a) > 0$	1	r_5, q_4	AA'	XA	—
1-7	$(d)(1)(3)(2)(4)(a) > 0$	1	r_5, q_4	AA'	d	—
7	$(d)(3)(4) < 0, (1)(2)(a) > 0$	1	r_5, q_4	AA'	CD	—
3-7	$(d)(1)(3)(2)(4) < 0, (a) > 0$	1	r_5, q_4	DD'	DX'	—
3-7	$(d)(1)(3)(2)(4) < 0, (a) = 0$	1	r_5, q_4	DD'	DX'	—
1-7	$(d)(1)(3)(2)(4)(a) < 0$	1	r_5, q_4	DD'	DX'	—
3-7	$(d) < 0, (1)(3)(2)(4)(a) > 0$	1	r_5, q_4	AA'	XA	—
3-7	$(d) = 0, (1)(3)(2)(4)(a) > 0$	1	r_5, q_4	AA'	XA	—
1-7	$(d)(1)(3)(2)(4)(a) > 0$	1	r_5, q_4	AA'	d	—
7	$(d)(3)(4) < 0, (1)(2)(a) > 0$	1	r_5, q_4	AA'	CD	—

Fortsättning af Tabell XVII.

Positions Ordnings- Nummer.	Vilkor.	Reella Rötters Antal.	Reella Rötters Plaisar.	Egna Komplexa Rötter.		Deriverade Komplexa Rötters Grenar.
				Grenar.	Intervaller.	
II. $g = 0$.						
	2. $h = 0$.					
—	(1) = 0.....	5 (5)	$r_5 = \varrho_4 = r_4 = \varrho_3 = r_3 = \varrho_2 = r_2 = \varrho_1 = r_1$	—	—	—
—	(1) > 0.....	1	r_5, ϱ_4	A C	A C	—
—	(1) < 0.....	1	 ϱ_1, r_1	B D	B D	—
III. $g < 0$.						
	1. $h < 0$.					
—	(a) (1) < 0, (2) (d) > 0.....	3	 $r_3, \varrho_2, r_2, \varrho_1, r_1$			BC
—	(a) < 0, (1) = 0, (2) (d) > 0.....	3 (2)	 $r_3, \varrho_2, r_2 = \varrho_1 = r_1$			BC
—	(a) (1) < 0, (2) = 0, (d) > 0.....	3 (2)	 $r_3 = \varrho_2 = r_2, \varrho_1, r_1$			BC
—	(a) < 0, (1) (2) (d) > 0.....	1	 r_3, ϱ_2	AA'	XA	BC
—	(a) = 0, (1) (2) (d) > 0.....	1	 r_3, ϱ_2	AA'	a	BC
—	(a) (1) (2) (d) > 0.....	1	 r_3, ϱ_2	AA'	AB	BC
—	(a) (1) (2) < 0, (d) > 0.....	1	 ϱ_1, r_1	DD'	DX'	BC
—	(a) (1) (2) < 0, (d) = 0.....	1	 ϱ_1, r_1	DD'	d	BC
—	(a) (1) (2) (d) < 0.....	1	 ϱ_1, r_1	DD'	CD	BC
2. $h = 0$.						
—	(1) = 0.....	3 (3)	$r_3 = \varrho_2 = r_2 = \varrho_1 = r_1$			BC
—	(1) > 0.....	1	r_3, ϱ_2	AA'	AB	BC
—	(1) < 0.....	1	 ϱ_1, r_1	DD'	CD	BC
4. $h = \frac{5g^2}{9}$.						
—	(S) = 0.....	1				((S))
—	(S) > 0.....	1				SA, SC
—	(S) < 0.....	1				SB, SD

Not.

Approximativ beräkning af numeriska eqvationers komplexa rötter, då deras antal ej öfverstiger fyra.

Låt den framställda eqvationen af n :te graden $\varphi(z) = 0$ hafva 1 till koëfficient för z^n och noll för z^{n-1} .

1) *Eqvationen har två komplexa rötter.* Vi beteckna dem med $x \pm ui$ och sätta

$$(1) \quad x^2 + u^2 = R.$$

Låt σ betyda summan af eqvationens $\varphi(z) = 0$ reella rötter, p deras produkt, och a vara eqvationens konstanta term. Då är, på grund af det kända sambandet mellan en algebraisk eqvations rötter och koëfficienter,

$$(2) \quad 2x + \sigma = 0,$$

$$(3) \quad pR = (-1)^n a,$$

ur hvilket system de obekanta med lätthet beräknas.

2) *Eqvationen har fyra komplexa rötter.* Vi beteckna dess reella rötter med $a, b, c, \dots, g$;
komplexa » » $x \pm ui, y \pm vi$.

Vidare sätta vi

$$(4) \quad z = t + h,$$

samt bestämma h ur vilkors-eqvationen

$$(5) \quad a + b + c + \dots + g = -4h.$$

Genom insättning af $t + h$ i stället för z i $\varphi(z) = 0$ erhålles

$$(6) \quad \varphi(h) + t\varphi'(h) + \frac{t^2}{2!}\varphi''(h) + \dots + \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(h) + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(h) + \frac{t^n}{n!}\varphi^{(n)}(h) = 0,$$

eller, om vi skriva termerna i motsatt ordning,

$$(7) \quad t^n + nht^{n-1} + Kt^{n-2} + \dots + Lt + M = 0,$$

då nemligen

$$(8) \quad K = \frac{\varphi^{(n-2)}(h)}{(n-2)!}, \quad L = \varphi'(h), \quad M = \varphi(h).$$

Denna eqvation (7) har $n - 4$ reella rötter, nemligen

$$a - h, b - h, c - h, \dots, g - h,$$

hvilka vi beteckna med

$$A, B, C, \dots, G,$$

samt två par komplexa, nemligen

$$x - h \pm ui, y - h \pm vi,$$

kortligen

$$\xi \pm ui, \eta \pm vi.$$

Äfven sätta vi

$$(9) \quad \xi^2 + u^2 = R, \quad \eta^2 + v^2 = S.$$

Eftersom summan af alla rötterna till eqv. (7) skall vara $= -nh$, så är

$$(10) \quad A + B + C + \dots + G + 2\xi + 2\eta = -nh,$$

eller, som är detsamma,

$$(11) \quad a + b + c + \dots + g - (n - 4)h + 2\xi + 2\eta = -nh,$$

hvaraf erhålles, på grund af (5),

$$(12) \quad \xi + \eta = 0.$$

Eftersom summan af de två-lediga produkterna af alla rötterna till eqv. (7) skall vara $= K$, så erhålles, om vi beteckna summan af de

$n - 4$ reella rötterna till (7) med σ_1 ,

två-lediga produkterna af samma rötter med σ_2 ,

$$(13) \quad R + S + 4\xi\eta + 2\sigma_1(\xi + \eta) + \sigma_2 = K,$$

det är, på grund af (12),

$$(14) \quad R + S + 4\xi\eta = K - \sigma_2.$$

Eftersom produkten af alla rötterna till eqv. (7) skall vara $= (-1)^n M$, så erhålles, om vi beteckna produkten af de $n - 4$ reella rötterna med P ,

$$(15) \quad PRS = (-1)^n M,$$

eller

$$(16) \quad RS = (-1)^n \frac{M}{P}.$$

Eftersom summan af de $(n-1)$ -lediga produkterna af alla rötterna till eqv. (7) skall vara $= (-1)^{n-1} L$, så erhålles, om vi beteckna summan af de $n - 4$ reella rötternas inversa värden med Σ ,

$$(17) \quad PRS \left(\Sigma + \frac{1}{\xi + ui} + \frac{1}{\xi - ui} + \frac{1}{\eta + vi} + \frac{1}{\eta - vi} \right) = (-1)^{n-1} L,$$

eller, på grund af (16),

$$(18) \quad \xi S + \eta R = (-1)^{n-1} \cdot \frac{L + M\Sigma}{2P}.$$

Ur eqvationerna (12), (14), (18) och (16), hvilka vi för korthets skull skriva sålunda:

$$(19) \quad \xi + \eta = 0,$$

$$(20) \quad R + S + 4\xi\eta = \alpha,$$

$$(21) \quad \xi S + \eta R = \beta,$$

$$(22) \quad RS = \gamma,$$

kunna nu de fyra qvantiteterna ξ , η , R och S beräknas på följande sätt.

På grund af (19) kunna (20) och (21) skrivas

$$(23) \quad R + S = \alpha + 4\eta^2,$$

$$(24) \quad R - S = \frac{\beta}{\eta},$$

hvaraf erhålles

$$(25) \quad R = \frac{1}{2} \left(\alpha + 4\eta^2 + \frac{\beta}{\eta} \right),$$

$$(26) \quad S = \frac{1}{2} \left(\alpha + 4\eta^2 - \frac{\beta}{\eta} \right),$$

och här af åter, genom insättning i (22),

$$(27) \quad (\alpha + 4\eta^2)^2 - \frac{\beta^2}{\eta^2} = 4\gamma,$$

eller

$$(28) \quad 16\eta^6 + 8\alpha\eta^4 + (\alpha^2 - 4\gamma)\eta^2 - \beta^2 = 0.$$

Denna eqvation har uppenbarligen åtminstone *en* positiv η^2 -rot. Den har ock *blott en* sådan.

Detta är själfklart i den händelse, att α är > 0 . Är deremot $\alpha < 0$, så behöfver man blott bevisa, att α^2 är $< 4\gamma$.

Och att så verkligen förhåller sig, inses lätt deraf, att, på grund af (20) och (22),

$$(29) \quad \alpha^2 - 4\gamma \text{ är } = 16\xi^2\eta^2 + 8\xi\eta(R + S) + (R - S)^2,$$

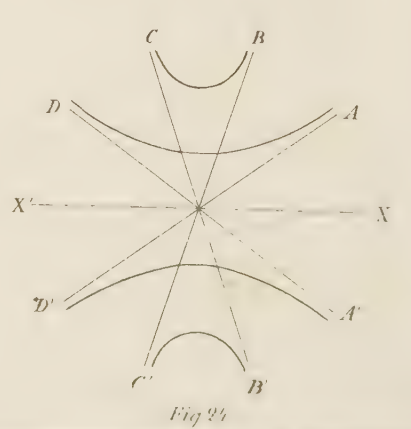
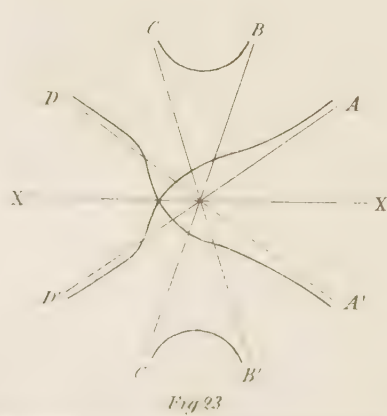
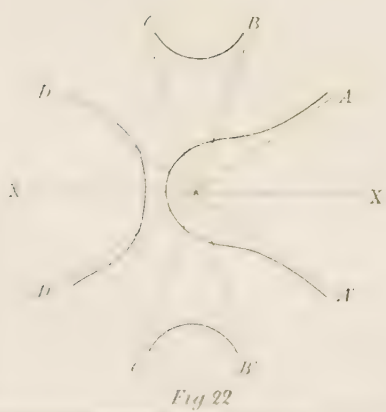
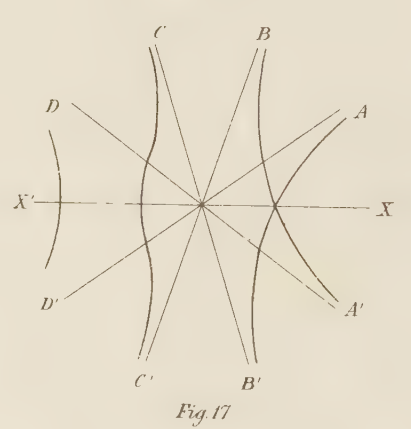
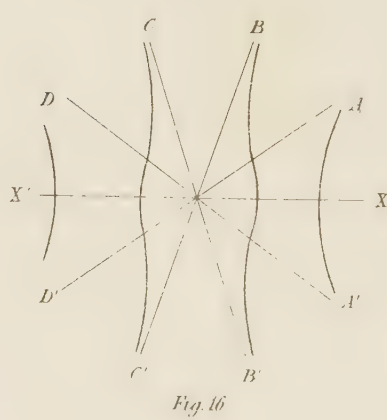
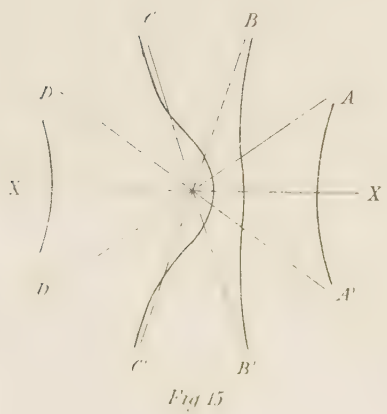
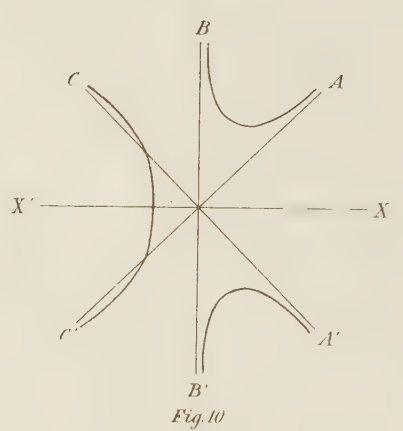
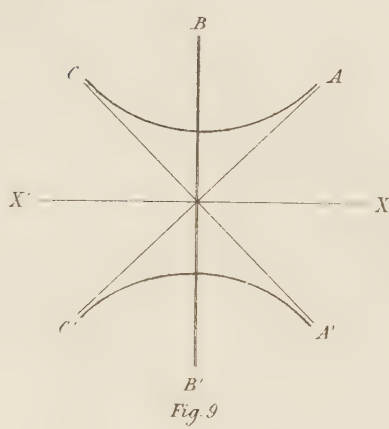
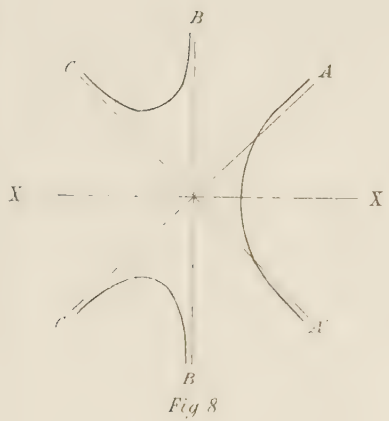
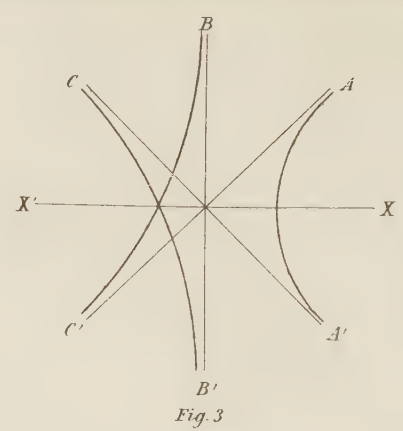
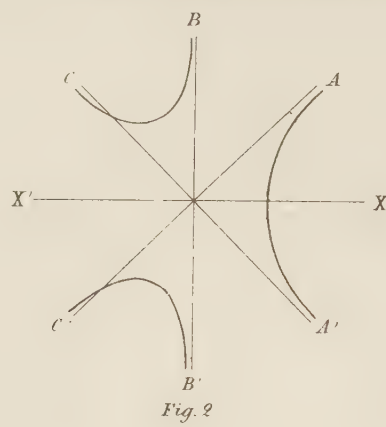
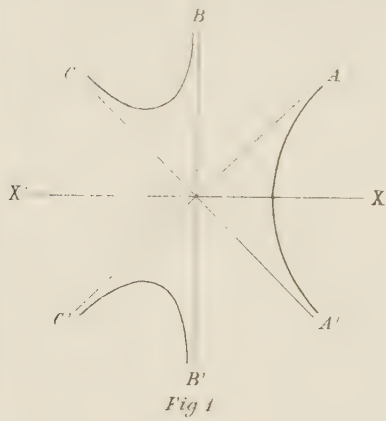
att vidare detta sednare membrum blir genom uppdelning

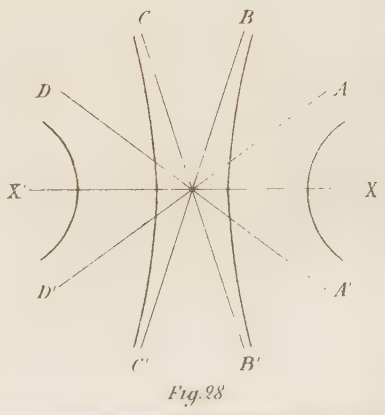
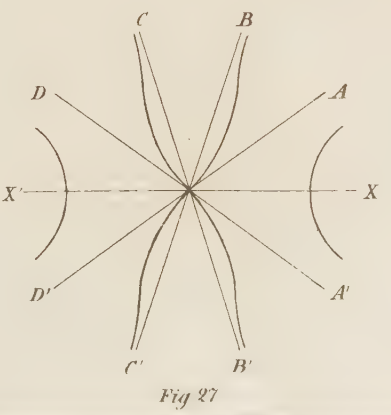
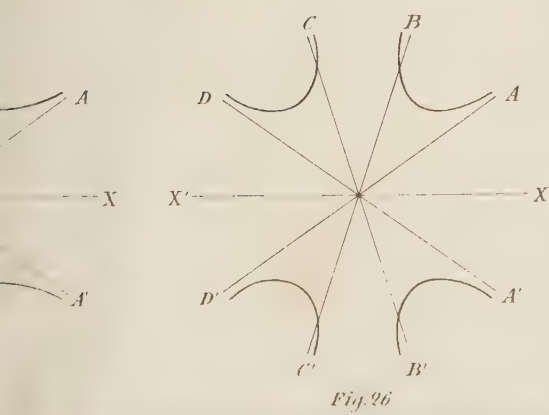
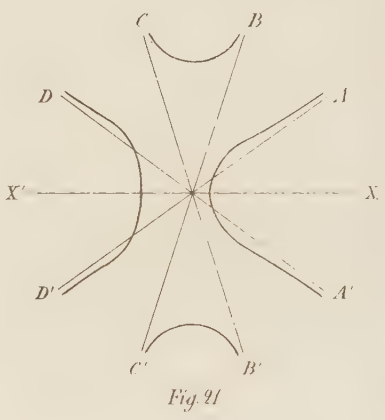
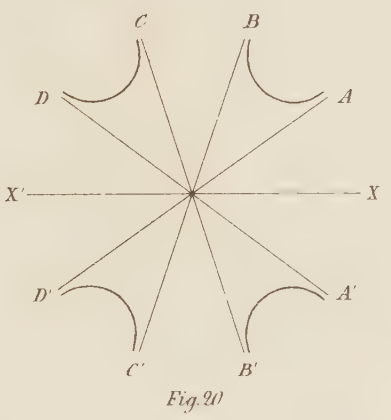
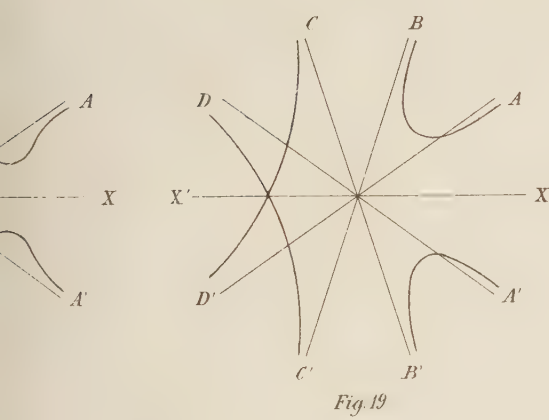
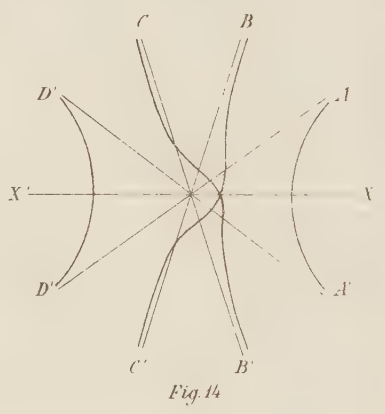
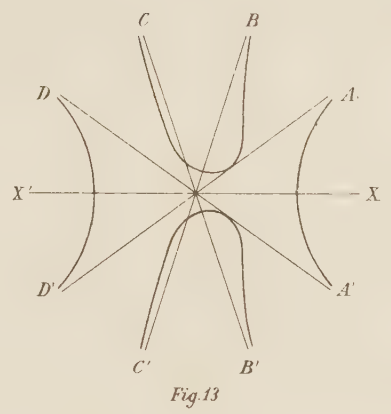
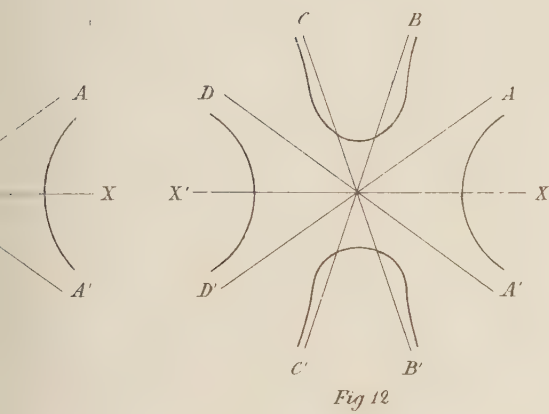
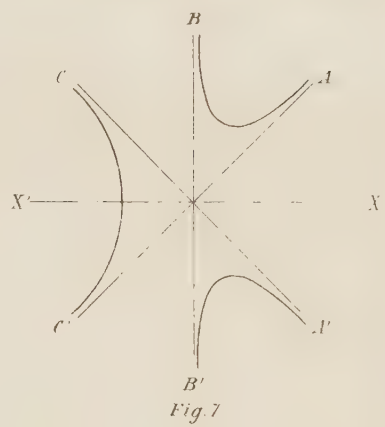
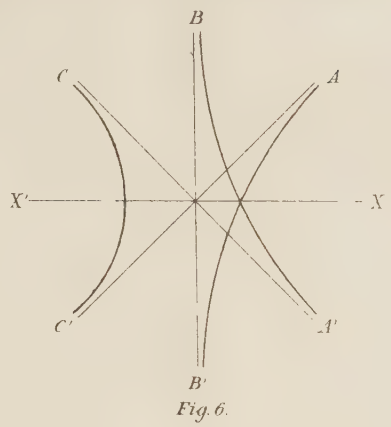
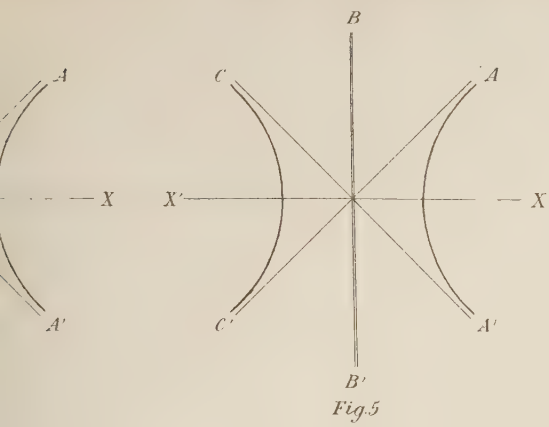
$$(30) \quad (4\xi\eta + R + S + 2\sqrt{RS})(4\xi\eta + R + S - 2\sqrt{RS}),$$

samt att af dessa båda faktorer den sednare uppenbarligen är negativ, den förra deremot positiv, alldenstund såväl $\frac{R+S}{2}$, som ock $\sqrt{RS}$ är $>$ num. val. $\xi\eta$.

Betecknas då den positiva η^2 -roten till (28) med r^2 , så äro ξ och $\eta =$ hvarsin af de båda $\pm r$;

hvar efter R och S beräknas ur (25) och (26).





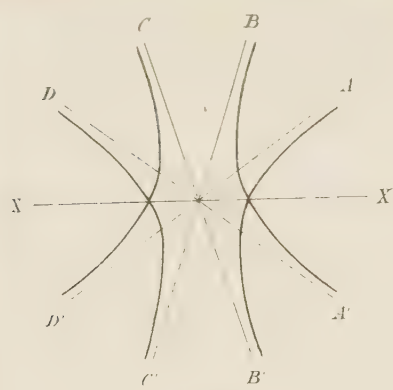


Fig. 29

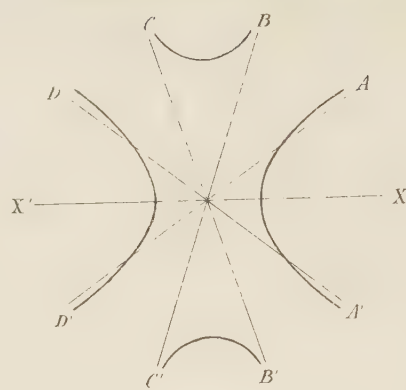


Fig. 30

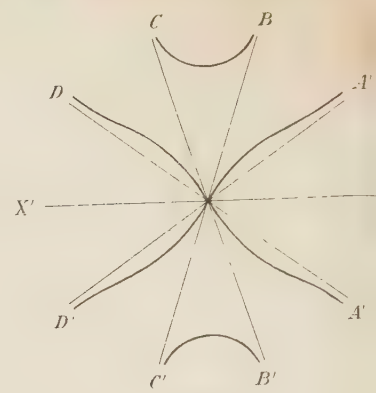


Fig. 31

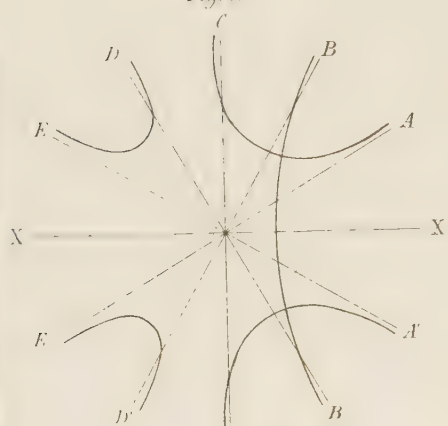


Fig. 35

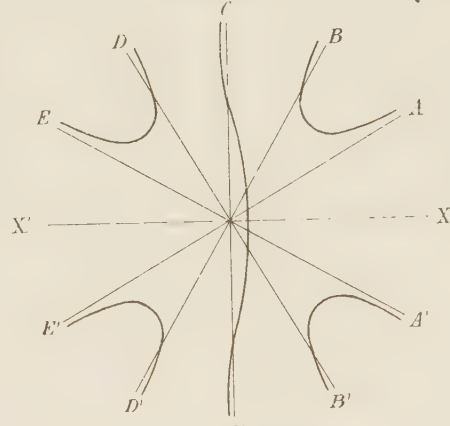


Fig. 36

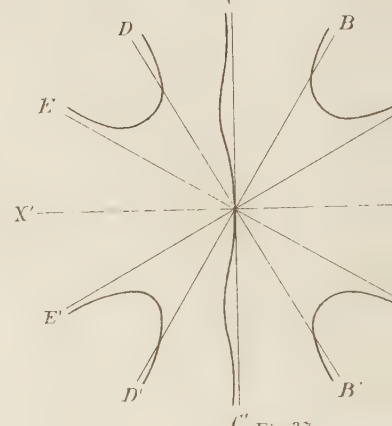


Fig. 37

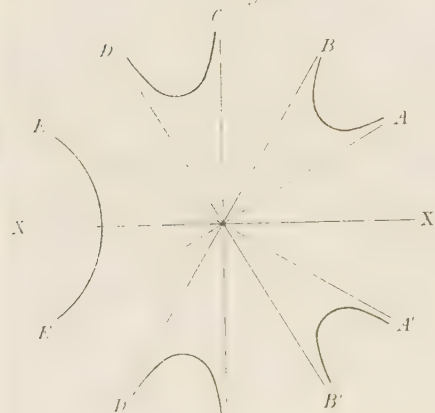


Fig. 41

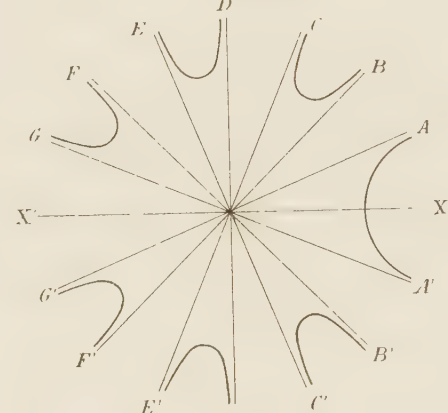


Fig. 42

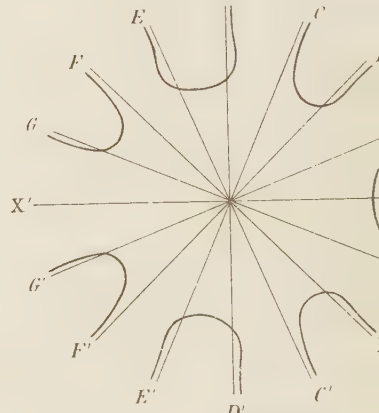


Fig. 43

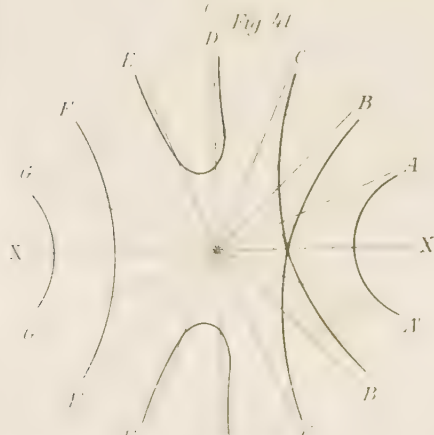


Fig. 47

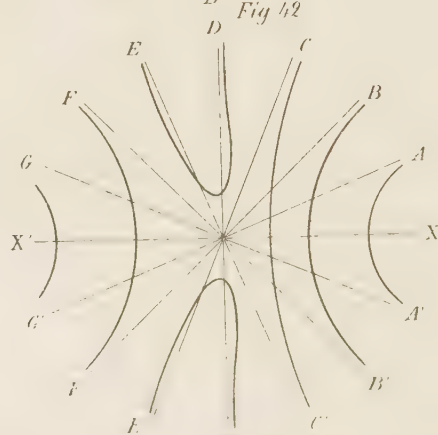


Fig. 48

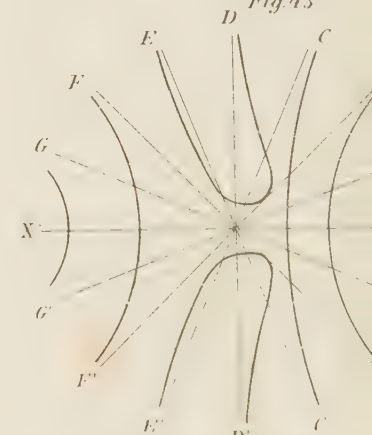


Fig. 49

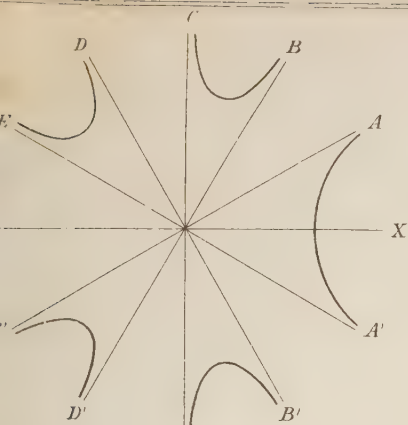


Fig. 32

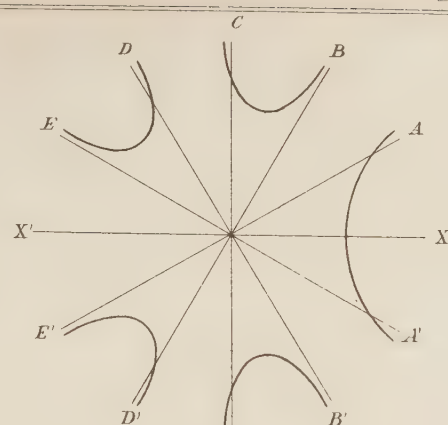


Fig. 33

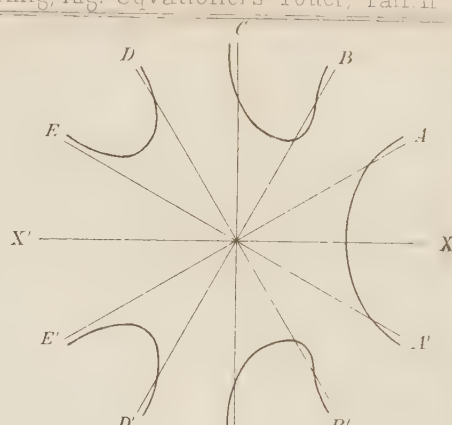


Fig. 34

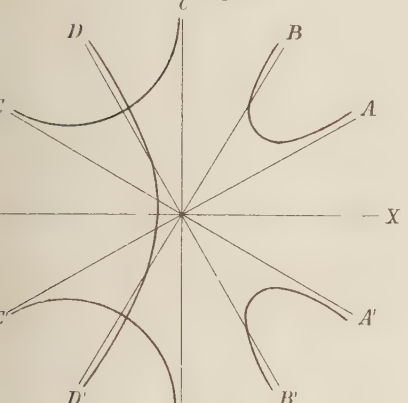


Fig. 38

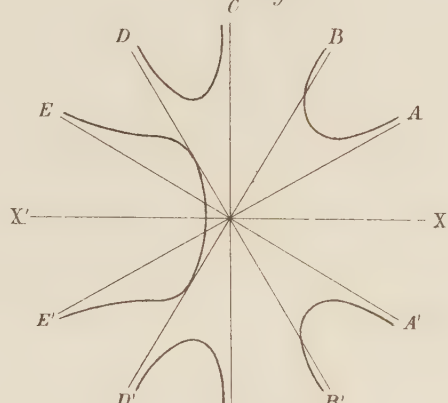


Fig. 39

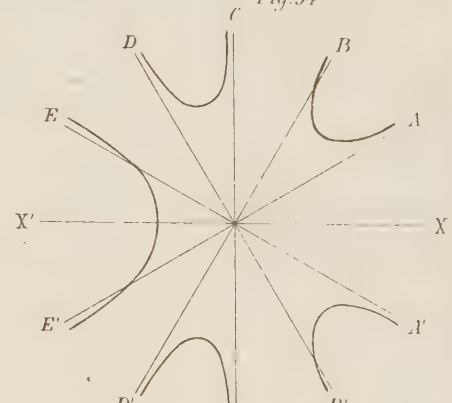


Fig. 40

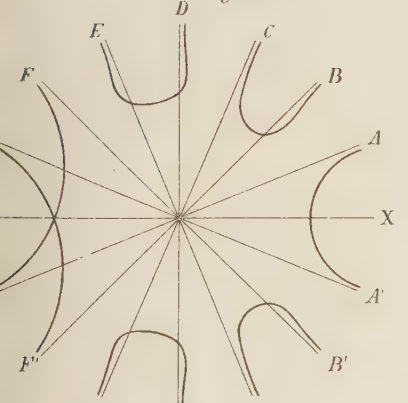


Fig. 44

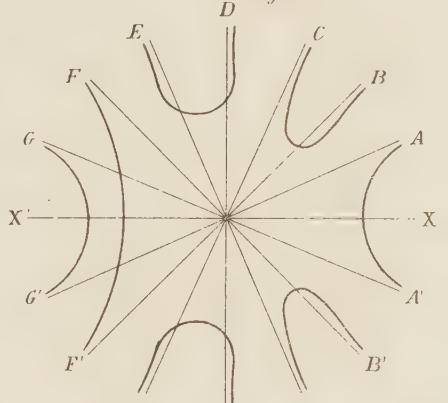


Fig. 45

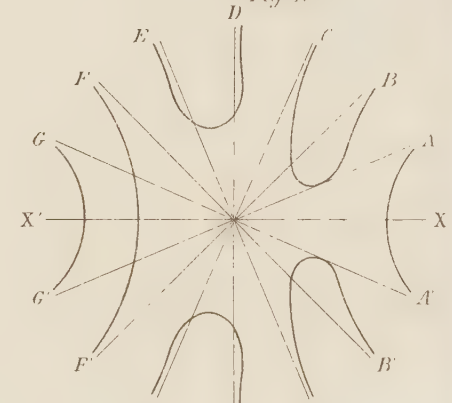


Fig. 46

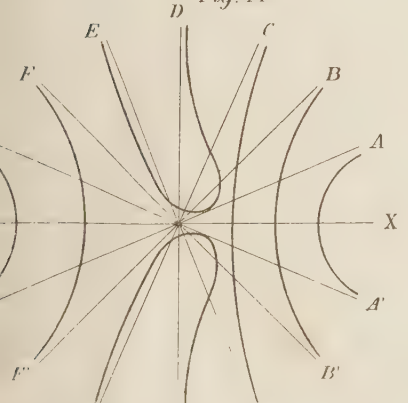


Fig. 50

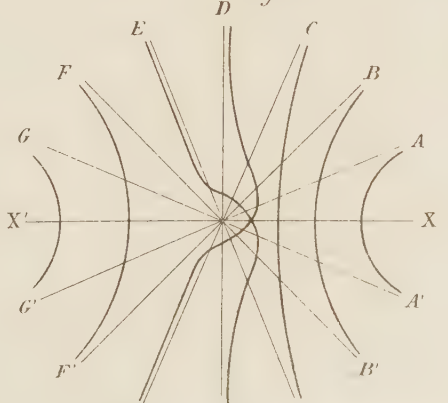


Fig. 51

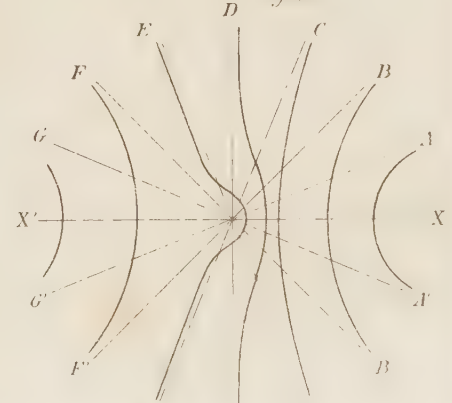


Fig. 59

11

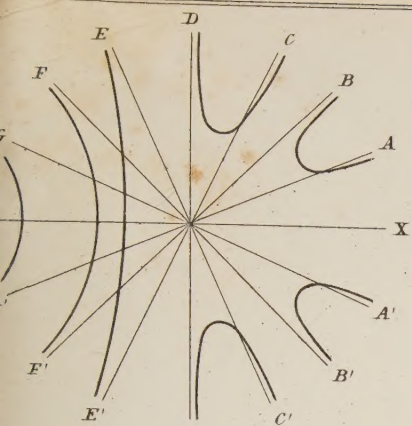


Fig. 56

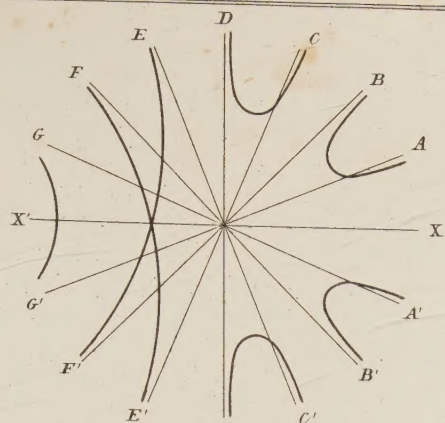


Fig. 57

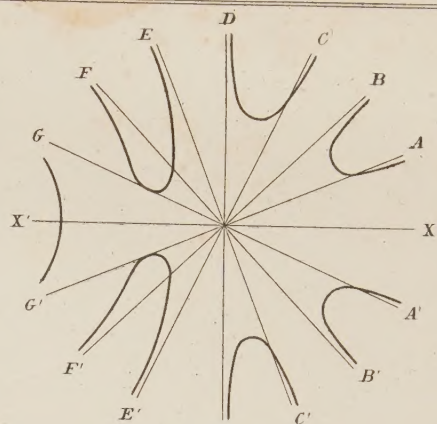


Fig. 58

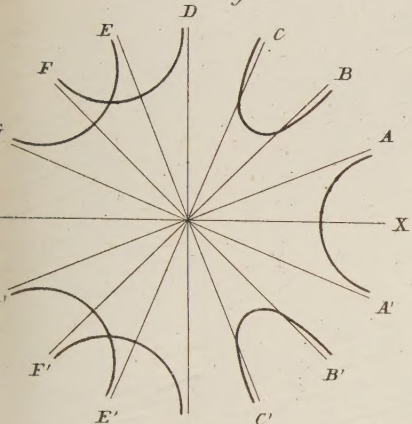


Fig. 62

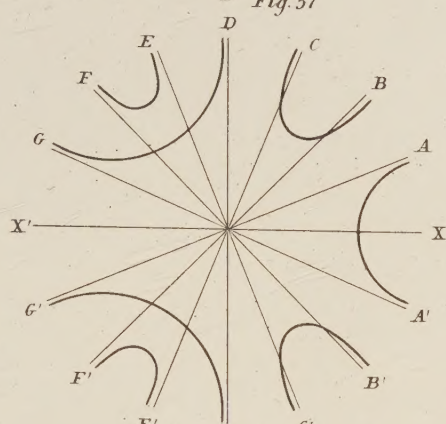


Fig. 63

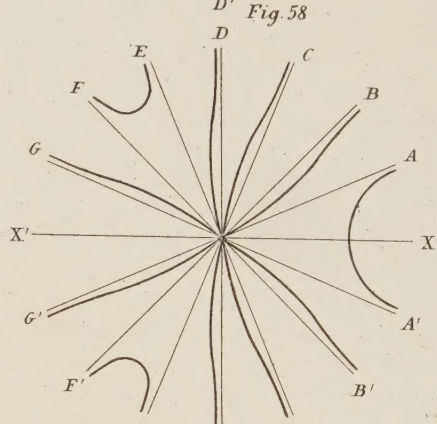


Fig. 64

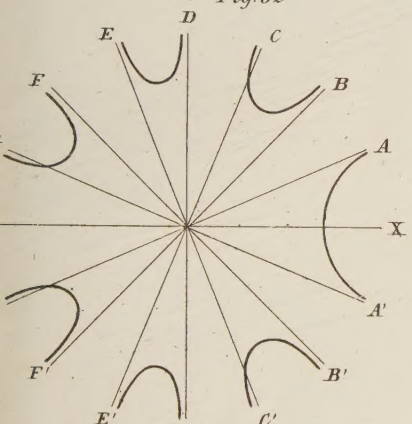


Fig. 68

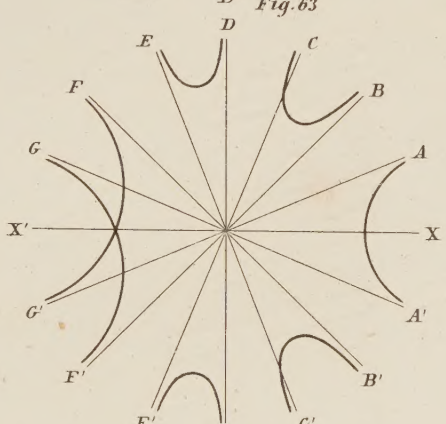


Fig. 69

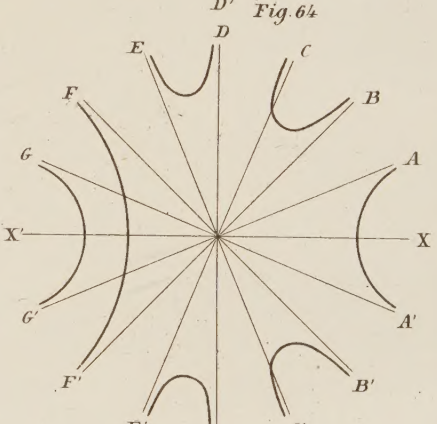


Fig. 70

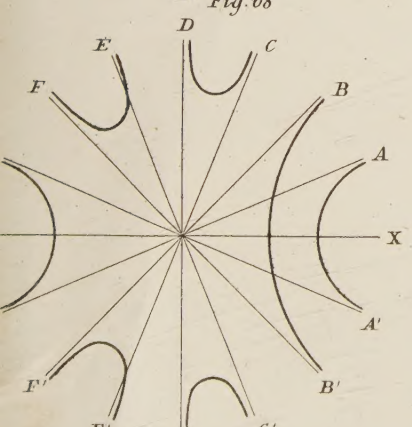


Fig. 74

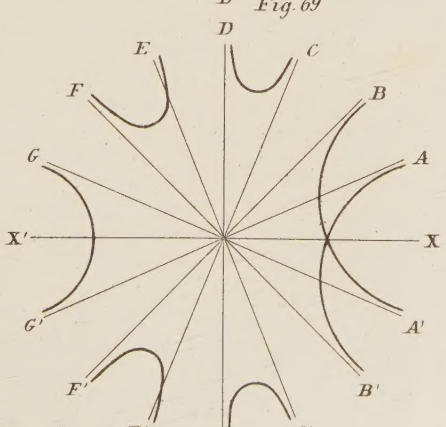


Fig. 75

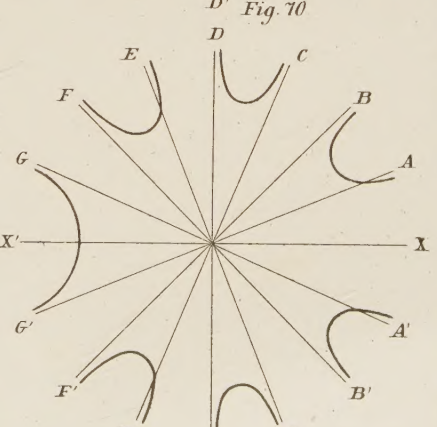


Fig. 76

